Ravnina in prostor – aksiomi, definicije in izreki (2. letnik)

(OPOMBA: V drugih zapiskih od te snovi je bilo najdenih veliko napačnih trditev, saj jih večinoma dodajajo učenci, ki ne preverijo zapisanega. Zato sem dodala izboljšano in pravilno verzijo zapiskov, da se ne boste iz napačnih učili. Vaša inštruktorica matematike ☺)

OSNOVNI GEOMETRIJSKI POJMI

Točke: A, B, C .. ali A_1, A_2, A_3 ..

Daljica: množica vseh točk med dvema danima točkama premice (nosilka daljice).

Premice: p, q, s, t, .. ali p_1, p_2, p_3…

Ravnina: neskončno tanka, ravna ploskev

Izreki: matematične trditve (resnice), ki jih dokazujemo s pomočjo aksiomov

Definicije: opredelitev novih pojmov

Aksiomi: osnovne matematične resnice, ki jih ni potrebno dokazovati

AKSIOMI:

- ⇒ Skozi **dve različni točki** ravnine lahko položimo **natanko eno premico**.
- ⇒ Če ima premica z ravnino dve skupni točki, leži premica v celoti v ravnini.
- ⇒ **Tri točke**, ki ne ležijo na isti premici (=**nekolinearne**) določajo natanko **eno ravnino**.
- ⇒ Skozi neko točko, ki ne leži na dani premici, poteka natanko ena premica, ki je prvi premici vzporedna.
- ⇒ Če imata dve različni ravnini skupno točko, imata skupno natanko eno premico.

DEFINICIJE IN IZREKI:

- ⇒ **Dve premici**, ki imata največ *eno skupno točko*, pravimo da se sekata v **presečišče**.
- ⇒ Če dve različni premici v ravnini nimata *nobene skupne točke*, sta premici **vzporedni.**
- ⇒ **Dve sekajoči ali vzporedni premici** določata natanko **eno ravnino** v kateri ležita ti dve premici.
- ⇒ **Premica in točka, ki ne leži na njej**, določata natanko **eno ravnino**, ki vsebuje premico in točko.
- ⇒ Če imata dve premici (različni) dve skupni točki, imata skupno celotno (eno) premico.
- ⇒ Presek dveh ravnin je premica.
- ⇒ Premici, ki ne ležita na isti ravnini in nimata skupne točke, sta **mimobežni.**
- ⇒ Premica, ki ima z ravnino natanko eno skupno točko, ravnino prebada (**prebodišče**).
- ⇒ Premica in ravnina sta vzporedni, če nimata skupne točke ali, če premica leži v ravnini.
- ⇒ Ravnini, ki nimata nobene skupne točke ali pa imata vse točke skupne, sta vzporedni.
- ⇒ Točke, ki ležijo na isti ravnini so **komplanarne** in točke, ki ne ležijo na isti ravnini so **nekomplanarne**.
- ⇒ Vsaka premica p razdeli ravnina na dve **polravnini**. Premica p je rob ravnine.
- ⇒ Premica na kateri leži daljica oz. poltrak, je **nosilka** daljice oz. poltraka.
- ⇒ Če so tri različne točke kolinearne (na isti premici), ena leži med drugima dvema.
- ⇒ Na dano premico lahko skozi dano točko potegnemo natanko eno pravokotnico.

⇒ **Daljica** AB je sestavljena iz vseh točk premice, ki ležijo med točkama A in B.

⇒ **Razdalja med točkama** A in B je dolžina daljice AB, ki povezuje ti dve točki; daljici torej priredimo neko pozitivno realno število. Oznaka: **d(A,B) =| AB|**
Lastnosti razdalje:
- Je nenegativno realno št.
- Razdalja od A do B je enaka razdalji od B do A
- Trikotniška neenakost → d(A,B) ≤ d(A,C) + d(C,B)
  in d(A,B) = d(A,C) + d(C,B), če točka C leži med A in B na daljici AB

⇒ **Poltrak** je ravna črta, ki je na eni strani neomejena, na drugi strani pa jo omejuje točka. Točka na premici razdeli premico na dva poltraka s skupnim izhodiščem.
- Presek dveh poltrakov je lahko: točka, daljica,poltrak ali prazna množica.

⇒ **Lik** je množica točk v ravnini, ki ga omejujejo ravne ali krive črte. Te črte so rob lika.

⇒ **Večkotnik** je sklenjen lik oz. **množica točk**, ki ga omejujejo daljice. Te daljice so stranice večkotnika.
- Prvi smiseln večkotnik je trikotnik, ker ima tri kote.

⇒ **Kot** je množica točk v ravnini, ki jo omejujeta *dva poltraka (kraka kota)* s skupnim izhodiščem.

⇒ **Konveksna množica** je konveksna, če hkrati z vsakima dvema svojima točkama vsebuje tudi daljico med njima. (*za vsaki dve izbrani točki v liku mora biti celotna daljica med njima tudi vsebovana v liku*)

Večkotnik:

⇒ Večkotnik je sklenjen lik, ki ga omejujejo daljice (najmanj tri).

⇒ Daljice, ki omejujejo večkotnik so stranice. (povezujejo sosednja oglišča) (dolžine ne morejo biti poljubna realna št.→ ~~1cm,2cm,5cm~~).

⇒ Premice na katerih ležijo stranice večkotnika (a,b,c) imenujemo nosilke stranic (p,r,q).

⇒ Presečišča nosilk stranic so točke, ki jim pravimo oglišče.

⇒ **Diagonala** je daljica, ki veže dve nesosednji oglišči (veljati začne vključno s štirikotnikom in naprej).

⇒ **n-kotnik** $(n \geq 3)$**:**
- iz n oglišč lahko potegnemo n diagonal
- iz enega oglišča lahko potegnemo n - 3 diagonal
- vsako diagonalo štejemo 2x zato delimo z 2
- **Število diagonal v n-kotniku** se torej izračuna po formuli: $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$
- **Vsota notranjih kotov n-kotnika** se izračuna po formuli: $(n-2) \cdot 180°$

Togi premik:

⇒ **Togi premik** je <u>preslikava ravnine vase</u>, ki ohranja medsebojne razdalje točk. Če togi premik preslika točko A v A' in točko B v B' velja, da je razdalja od točke A in B→ d(A,B) enaka točki A' in B'→ d(A',B').

- Med toge premike štejemo: vzporedni premik (TRANSLACIJA), zasuk (ROTACIJA), zrcaljenje čez točko in čez premico.
- Togi premik preslika premico v premico, poltrak v poltrak in daljico v daljico.
- Translacija in rotacija ohranjata tudi orientacijo lika, medtem ko zrcaljenje spremeni orientacijo.

⇒ **Skladnost:** dve množici točk sta skladni, če obstaja togi premik, ki eno množico točk preslika v drugo. Dve daljici sta skladni, če sta enako dolgi.

SKLADNOST KOTOV:
Koti z vzporednimi kraki: kota, ki imata oba para krakov vzporedna v isto smer, sta **skladna**.
Koti z nasprotnimi kraki: kota, ki imata oba para krakov v nasprotno smer, sta **skladna**. Imenujemo ju **SOVRŠNA KOTA**(skupen vrh in kraki paroma vzporedni v nasprotno smer)

Skladnost je **ekvivalenčna relacija:**

- **REFLEKSIVNOST** (vsak lik skladen sam s sabo)
- **SIMETRIČNOST** (če je 1. lik skladen z 2., je tudi 2. skladen s 1.)
- **TRANZITIVNOST** (če je 1. lik skladen z 2. in je 2. skladen s 3. potem je tudi 1. skladen z 2.)

⇒ **Aksiom o vzporednici:** Vedno zbiramo točko v ravnini, ki ne leži na premici, tako lahko tej premici narišemo natanko eno vzporednico.

⇒ **Pravokotnica** je premica, ki dano premico seka pod pravim kotom.

PRAVOKOTNA PROJEKCIJA točke T na premico p:

Pravokotna projekcija točke T na premico *p* je presečišče premice *p* s prevokotnico na to premico, skoti točko T.

Razdalja med točko in premico:

Je razdalja med točko npr (T) in tisto točko na premici p, ki je točki T najbližja oz. razdalja med točko T in njeno pravokotno projekcijo na premico p.

Koti:

⇒ Dva poltraka s skupnim izhodiščem razdelita ravnino na dve množici točk. Vsaki od njiju pravimo **kot**. Znak za kot je $\measuredangle$

- Poltraka imenujemo **kraka**, skupno izhodišče pa **vrh**.
- Poznamo ničelni (0°), pravi (90°), iztegnjeni (180°) in polni kot (360°).
- Kota sta lahko **sosednja** → skupen vrh in en krak, nimata skupnih notranjih kotov
- Kota sta lahko **sokota** → skupen vrh, združitev v premico (njuna vsota je 180°)
- Kota sta lahko **sovršna** → skupen vrh, kraka se ne dopolnjujeta v premico; značilna skladnost (sta enake velikosti)
- Poznamo ostri kot (manjši od 90°), topi kot (med 90° in 180°) in izbočeni kot (večji od 180°).
- **Komplementarna** kota sta takrat, ko je njuna vsota 90° ($\alpha + \beta = 90°$), **suplementarna** pa , ko je 180° ($\alpha + \beta = 180°$).

Trikotnik:

⇒ **TRIKOTNIK** je najmanjši večkotnik, ki ga določajo 3 nekolinearne točke v ravnini; ima 3 stranice, 3 oglišča in 3 notranje kote, nima pa diagonal.

- Vsota vseh notranjih kotov je 180° → $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- Vsota vseh zunanjih kotov je 360° → $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$
- Zunanji kot ▲ je enak vsoti nepriležnih notranjih kotov trikotnika
  - $\alpha' = \beta + \gamma$
  - $\beta' = \alpha + \gamma$
  - $\gamma' = \beta + \alpha$
- Notranji in zunanji kot v istem oglišču sta suplementarna → $\alpha + \alpha' = 180°$ (tudi $\beta + \beta' = 180°$, $\gamma + \gamma' = 180°$)
- ▲ je pozitivno orientiran, če si njegova oglišča sledijo v nasprotni smeri gibanja urinega kazalca, negativno pa, če si oglišča sledijo v smeri gibanja urinega kazalca.

Izreki v trikotniku (o dolžinah stranic):

⇒ Izrek 1: *V trikotniku leži nasproti daljše stranice večji kot, nasproti krajše stranice pa manjši kot.*

⇒ Izrek 2: *V trikotniku je vsota dolžin dveh stranic vedno večja od dolžine tretje stranice.*

Izreki o skladnosti trikotnikov:

⇒ Definicija: Dva trikotnika sta **skladna**, če imata skladne vse stranice in vse kote. Znak za skladnost je ≡ → ▲ABC ≡ ▲A'B'C'

⇒ Izrek 1: *Dva trikotnika sta skladna, če se paroma ujemata v vseh treh stranicah (a=a', b=b', c=c').* **SSS**

⇒ Izrek 2: *Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata v dveh stranicah in kotom med njima (c=c', b=b', $\alpha = \alpha'$).* **SKS**

⇒ Izrek 3: *Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata v eni stranici in obeh priležnih kotih (c=c' $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$).* **KSK**

⇒ Izrek 4: *Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata v dveh stranicah in kotu, ki leži večji od obeh stranic nasproti (c=c', b=b', $\gamma = \gamma'$).* **SSK**

SKLADNOST IN MERJENJE:

Dolžinske mere: 1m (osnovna enota)

- 1m = 10dm
- 1m = 100cm
- 1m = 1000mm
- 1km = 1000m

Merjenje kotov (Kote merimo s **stopinjami °, minutami ' in sekundami ")**

- 1° je $^{1}/_{360}$ polnega kota (DEG)
- 1° je 60' = 3600"
- 1' = 60"

Trikotniki glede na stranice in glede na kote:

1. Glede na stranice:

- **Enakostranični:**
  - 3 skladne stranice
  - Vsi notranji koti so skladni (α=60°)
  - Vsi zunanji koti so skladni (α'=120°)
  - Višine so enako dolge
  - Simetrala stranice je tudi simetrala kota (višina in težiščnica ležita na tej simetrali)

- **Enakokraki:**
  - 2 skladni stranici (a = b) – to sta kraka kota, tretja stranica je osnovnica
  - 2 enaka kota (α = β) – to sta kota ob osnovnici, tretji kot leži med krakoma in se imenuje kot ob vrhu
  - Višina na osnovnico (v_c) razpolovi osnovnico in kot ob vrhu
  - Višini na kraka sta enako dolgi (skladni)

- **Raznostranični:**
  - 3 notranji koti so vsi različni, prav tako zunanji
  - Vse višine so različne
  - Vse težiščnice so različne

2. Glede na kote:

- **Ostrokotni:**
  - Vsi 3 notranji koti so ostri koti (merijo več kot 0° in manj kot 90°)

- **Pravokotni:**
  - Natanko en notranji kot je pravi kot, ostala dva sta ostra kota in komplementarna
  - Najdaljša stranica je hipotenuza, preostali dve sta kateti (ki sta med seboj pravokotni)
  - Višina na a je enaka stranici b, višina na b pa stranici a
  - Velja Pitagorov izrek (hipotenuza^2= (kateta1)^2 + (kateta2)^2 *oziroma* $c^2 = a^2 + b^2$)

- **Topokotni:**
  - Natanko en notranji kot je topi kot (več kot 90° in manj kot 180°), preostala dva kota sta ostra kota.

Znamenite točke trikotnika:

⇒ **Težišče** je presečišče vseh treh težiščnic trikotnika.

- **Težiščnica** je daljica, ki veže eno oglišče trikotnika z razpoloviščem nasproti ležeče stranice.
- Težišče razdeli težiščnico v razmerju 1:2.
- Težiščnice se sekajo na 2/3 svoje dolžine od oglišča.

⇒ **Višinska točka** je presečišče vseh treh višin trikotnika.

- **Višina** je pravokotna razdalja od enega oglišča do nasprotne stranice.
- V ostrokotnem trikotniku pade višinska točka v notranjost trikotnika.
- V pravokotnem trikotniku pade višinska točka v oglišče, kjer je njej pravi kot.
- V topokotnem trikotniku pade višinska točka v zunanjost trikotnika.

⇒ **Središče trikotnika včrtanega kroga** je presečišče simetral notranjih kotov.

- **Simetrala kota** je premica, ki poteka skozi vrh kota in ga razpolavlja. Vse točke na simetrali so enako oddaljene od obeh krakov kota.

⇒ **Središče trikotnika očrtanega kroga** je presečišče simetral stranic trikotnika.

- **Simetrala daljice** je premica, ki je pravokotna na daljico in jo razpolavlja. Vse točke na njej so enako oddaljene od obeh krajišč daljice.

Izreki v pravokotnem trikotniku:

b, a … kateti

c … hipotenuza

a_1, b_1 … pravokotni projekciji katet na hipotenuzo

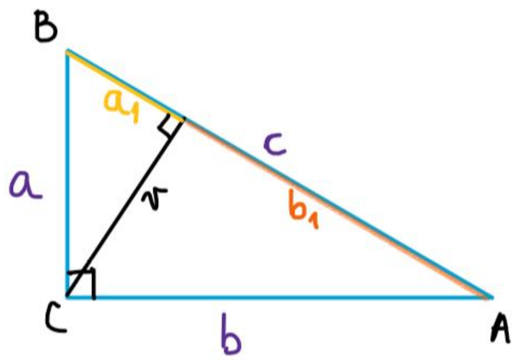
v (=v_c) … višina na hipotenuzo

PITAGOROV IZREK:

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = v^2 + {b_1}^2$

$a^2 = v^2 + {a_1}^2$



(Evklidov) VIŠINSKI IZREK:

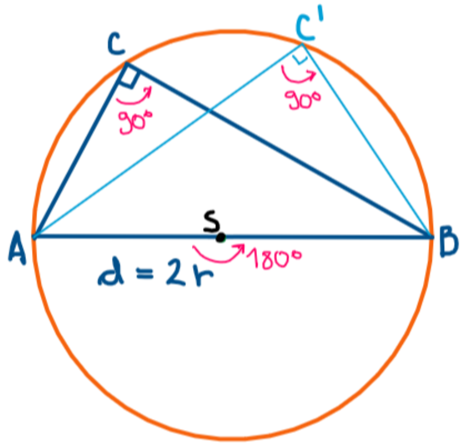
$v^2 = a_1 \cdot b_1$

EVKLIDOVA IZREKA:

$a^2 = c \cdot a_1$

$b^2 = c \cdot b_1$

TALESOV IZREK o kotu v polkrogu:



Obodni kot nad premerom je vedno pravi kot.

(na sliki je premer AB in vidimo da lahko narišemo poljubne obodne kote, npr. ACB, AC'B in prav vsi koti nad lokom AB bodo 90°)

Glej 'Središčni in obodni kot'.

KOSINUSNI IZREK (v poljubnem trikotniku):

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

SINUSNI IZREK (v poljubnem trikotniku):

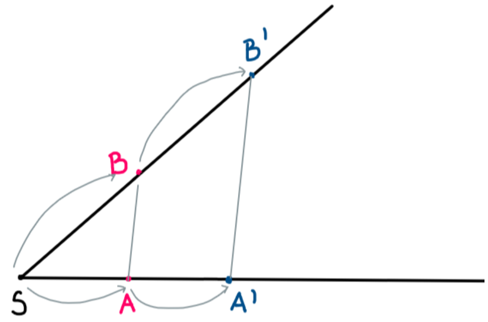
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ R … polmer trikotniku očrtanega kroga

Središčni razteg in podobnost:

Središčni razteg je preslikava, ki jo določata podatka: središče **S** in koeficient raztega **k.**
Če je **k > 1**, pride do **raztega**.
Če je **0 < k < 1**, pride do **skrčitve**.

(Na sliki je primer, ko je središče raztega točka S in je koeficient raztega k=2. Točka A sepreslika v točko A', točka B pa v točko B'.

Daljica SA' je tako dvakrat daljša ob SA, Daljica SB' pa dvakrat daljša od SB.)



***Opazimo:** SA in SA' sta na sti premici (vzporedni), Tako tudi SB in SB'. Posledično sta vzporedni tudi daljici AB in A'B'.*

Pri tem se navežemo na **podobnost:**

Dva <u>podobna lika</u> dobimo bodisi s togim premikom bodisi s središčnim raztegom (ali pa celo s kombinacijo obojega).

Kadar sta si dva lika podobna, so dolžine istoležnih stranic v enakem razmerju.

Npr. v zgornjem primeru sta podobna trikotnika SAB in SA'B'.

Definicija (o podobnih trikotnikih):

Trikotnika ABC in A'B'C' sta podobna, kadar velja:

$$\boldsymbol{a' : a = b' : b = c' : c = k}$$

ali drugače zapisano

$$\boldsymbol{\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k}$$

a, b, c … stranice trikotnika ABC
a', b', c' …. stranice trikotnika A'B'C'

Trikotnika sta podobna natanko tedaj, ko se ujemata v velikosti notranjih kotov.

Krog in krožnica:

Krog: je lik omejen s krožnico
Krožnica: je množica vseh točk v ravnini, ki so enako oddaljene od izbrane točke oziroma središča.
Zunanjost kroga: je množica vseh točk v ravnini, ki so od izbrane točke S oddaljene najmanj za polmer.

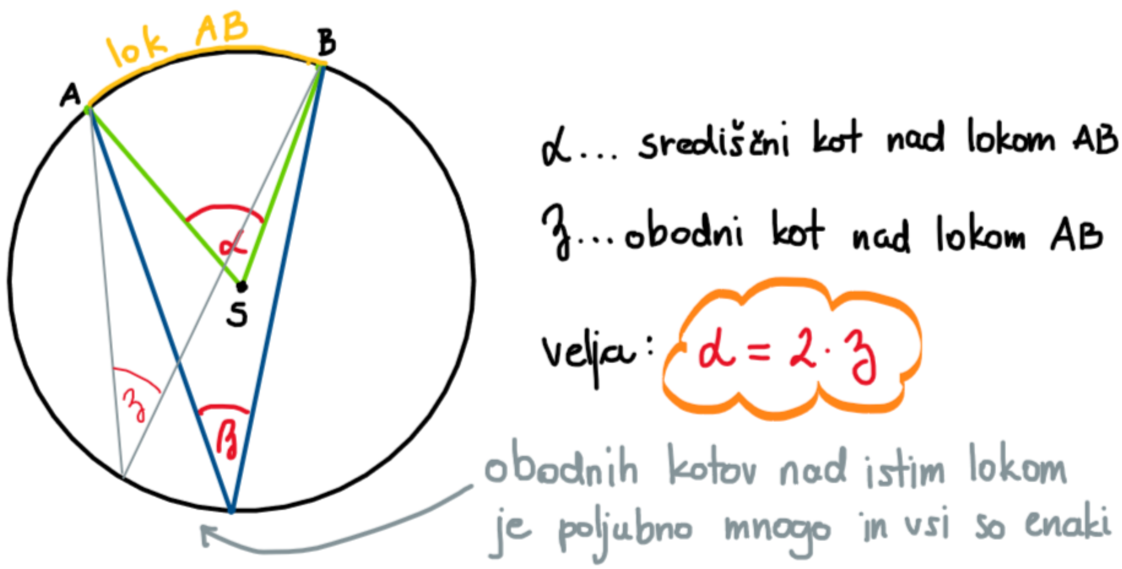
MEDSEBOJNA LEGA DVEH KROŽNIC:

- Imata skupno eno točko (se dotikata) – razdalja med središčema je vsota obeh polmerov
- Se sekata (v dveh točkah)
- Nimata skupnih točk
- Sta koncentrični (imata skupno središče)
- Sovpadata (vse točke so skupne)

Tetiva je daljica, ki povezuje 2 točki na krožnici.
Premer (diameter) je najdaljša tetiva in poteka skozi središče kroga (po velikosti je dvakrat daljša od polmera)
Polmer (radij) je razdalja od središča do točke na krožnici.
Lok je del krožnice oziroma množica vseh točk na krožnici med dvema točkama.
Tengenta (ali dotikalnica) je premica, ki se krožnice dotika (imata eno skupno točko)
Sekanta je premica, ki krožnico seka (v dveh točkah).
Mimobežnica je premica, ki se krožnice ne dotika.
Kolobar je množica točk v ravnini omejena z dvema koncentričnima krogoma različnih polmerov.

Obodni kot na lokom l je kot, ki ima vrh na krožnici, kraka potekata skozi krajišči loka l; lok l leži v notranjosti kroga.
Središčni kot na lokom l je kot, ki ima vrh v središču krožnice, kraka potekata skozi krajišči loka l, lok l leži v notranjosti kota.

središčni kot = 2 x obodni kot *(kadar sta nad istim lokom)*



Štirikotniki:

KVADRAT je lik, ki ima vse 4 stranice enako dolge in vse notranje kote enake (90°)

**spada med paralelograme*

PRAVOKOTNIK je lik, ki ima po dve in dve nasprotni stranici enako dolgi in vzdporedni, ter vse notranje kote enake (90°).

**spada med paralelograme*

PARALELOGRAM je štirikotnik, ki ima dva para vzporednih stranic.
Nasprotna kota v paralelogramu sta skladna, sosednja pa suplementarna. Ima diagonali e in f, ki se med seboj razpolavljata.

ROMB je posebna vrsta paralelograma, ki ima vse štiri stranice enako dolge. Njegovi diagonali sta med seboj pravokotni.

TRAPEZ je štirikotnik, ki ima en par vzporednih stranic (to sta osnovnici), ostali dve pa sta kraka. (velja: $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{180}°,\ \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180}°$)

Če sta kraka enako dolga, govorimo o **ENAKOKRAKEM TRAPEZU**.

DELTOID je štirikotnik, ki ima dva para enako dolgih sosednjih stranic **[a = b in c = d].**
Diagonali v deltoidu sta med seboj pravokotni.
Diagonala AC = e in diagonala BD = f. Diagonala f razpolavlja diagonalo e.

TANGENTNI ŠTIRIKOTNIK je štirikotnik, katerega stranice so tangente kroga. **[a + c = b + d].**

TETIVNI ŠTIRIKOTNIK je štirikotnik, katerega stranice so tetive.
Nasprotna kota v tetivnem 4-kotniku sta suplementarna. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180}°,\ \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{180}°$

bolj podrobno o likih v datoteki 'Geometrijski liki – lastnosti, obsegi in ploščine'.