Polinomi

- so izrazi, sestavljeni iz več členov - mnogočleniki
- so linearna kombinacija potenc z nenegativnimi celimi eksponenti
- so funkcije, ki imajo zgoraj opisano obliko

LINEARNA KOMBINACIJA JE VSOTA ČLENOV Z (REALNIMI) KOEFICIENTI

Zapis v splošnem:

VODILNI ČLEN

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

vodilni koeficient

prosti člen

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ so koeficienti

n = stopnja polinoma

npr. ničte stopnje: $p(x) = a_0$

prve stopnje: $p(x) = a_1 x + a_0$

druge stopnje: $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

⋮

Enakost dveh polinomov:

polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$

in

$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_1 x + b_0$

sta enaka natanko tedaj, ko $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ... $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$

Računske operacije nad polinomi:

I. vsota / razlika polinomov

$$p(x) \pm q(x) = (a_n \pm b_n) x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 \pm b_1) x + a_0 - b_0$$

II. množenje polinomov

$p(x) \cdot q(x) =$ množimo vsak člen iz $p(x)$ z vsakim členom iz $q(x)$

III. deljenje polinomov

$p(x) : q(x)$ = opis postopka v „Polinomi - rešene naloge"

$p(x) : q(x) = k(x)$ in ostanek deljenja $r(x)$

VELJA: $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$ [glej ostanek o deljenju - 1. letnik]

IV. množenje polinoma s konstanto

(vsak člen polinoma se pomnoži s konstanto)

$$C \cdot p(x) = C \cdot a_n x^n + C \cdot a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + C \cdot a_2 x^2 + C \cdot a_1 x + C \cdot a_0$$

Funkcija polinoma je lahko v:

Splošni obliki: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Ničelni (razcepni) obliki: $p(x) = \underbrace{a_n}_{\text{vodilni koeficient}} (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ NIČLE POLINOMA
[presečišča z osjo x]
ničla = x, za katerega velja: $p(x) = 0$

Iskanje kandidatov za cele ničle (če obstajajo):

d = delitelji vodilnega koeficienta
c = delitelji prostega člena

Vsa števila oblike $\pm \frac{c}{d}$ so kandidati za ničle. Ugotavljanje, katere so prave:

- z vstavljanjem kandidata namesto x v funkcijo (moramo dobiti 0)
- Hornerjev algoritem

Hornerjev algoritem uporabljamo za:

- iskanje ničel
- deljenje polinoma p(x) z linearnim polinomom (x − a)
- računanje vrednosti p(x) v točki a

enak postopek

Postopek reševanja: [glej Polinomi – rešene naloge]

v splošnem:

	1.	2.	...			n.
	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
a						
	a_n					m

koeficienti polinoma

kandidat za ničlo oz. točka v kateri računamo vrednost funkcije

To število je: - vrednost funkcije v točki a
- količnik deljenja $p(x) : (x - a)$

Postopek:

- Koeficiente polinoma v vrstnem redu zapišemo v 1. vrsto. Če katera potenca v polinomu ne nastopa, je koeficient na tem mestu enak 0.
- Vodilni koeficient v prvem stolpcu prepišemo v spodnjo vrstico 1. stolpca.
- Vsako število iz spodnje vrstice pomnožimo s kandidatom 'a' in produkt vnesemo v 2. vrstico naslednjega stolpca.
- Prvo in drugo vrstico seštejemo v vsakem stolpcu in vsoto zapišemo v spodnjo vrstico
- Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo števila m 'spodaj desno'.
- VELJA: če je dobljeno število 'm' enako 0, potem je kandidat 'a' ničla funkcije p(x).

Racionalna funkcija

Zapis v splošnem: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; $q(x) \neq 0$ količnik dveh polinomov (vedno v obliki ulomka)

ničle : presečišča z x osjo
izračunamo : $p(x) = 0$ (števec enačimo z 0 ter rešimo enačbo)

poli : so tam, kjer funkcija ni definirana oz. ne obstaja (navpična črtkana črta)
funkcija se polu približuje, vendar ga ne sme sekati
izračunamo : $q(x) = 0$ (imenovalec enačimo z 0 ter rešimo enačbo)

presečišče z y osjo (začetna vrednost) : $f(0) =$ (namesto x vstavimo 0 in izračunamo)

vodoravna asimptota (v.a.) : - pove dogajanje funkcije daleč od izhodišča
- vrednost je enaka limiti : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y$
- enačba : $y = C$

Ločimo 3 možnosti, če je $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ in je $p(x)$ polinom stopnje n ; a_n vodilni koef.
$q(x)$ polinom stopnje m; b_n vodilni koef.

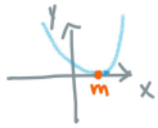
I $n < m$: $y = 0$

II. $n = m$: $y = \frac{a_n}{b_n}$ → enačba v.a. je količnik med vodilnima koef.

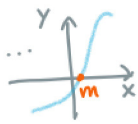
III $n > m$: $y = p(x) : q(x)$ → enačba vodoravne asimptote je rezultat deljenja polinomov

Sodost ali lihost ničel $p(x) = 0$

- ničla sode stopnje (2. stopnje) : če se enaka rešitev pojavi 2-krat, 4-krat, ... funkcija se v tej točki dotika x osi

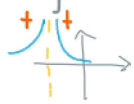


- ničla lihe stopnje (1. stopnje) : če se enaka rešitev pojavi 1-krat, 3-krat, ... funkcija v tej točki seka x os

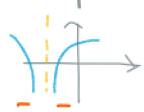


Sodost ali lihost polov $q(x) = 0$

- pol sode stopnje : če se enaka rešitev pojavi 2-krat, 4-krat, ... funkcija se polu približuje z obeh strani v ENAKO SMER (+∞ ali −∞)



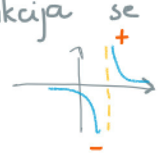
ali



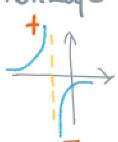
predznak f. se ohrani

- pol lihe stopnje : če se enaka rešitev pojavi 1-krat, 3-krat, ... funkcija se polu približuje z obeh strani v NASPROTNO SMER

predznak f. se spremeni



ali



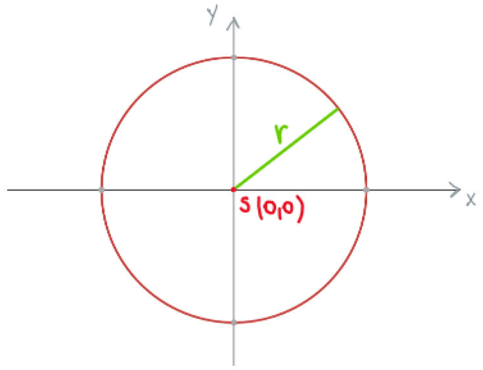
Stožnice (krivulje 2. reda)

Krožnica

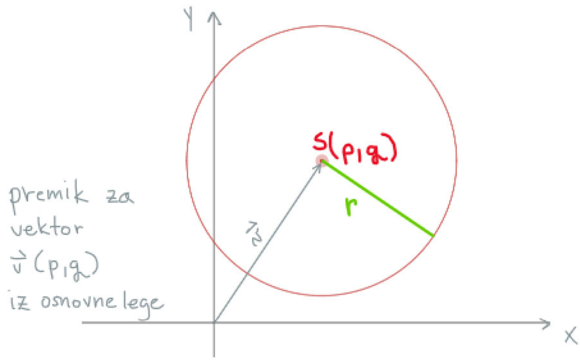
Implicitna oblika enačbe: $\underline{\underline{A}}x^2 + \underline{\underline{B}}y^2 + Cx + Dy + E = 0$; $A = B$!

I. v osnovni legi
$$x^2 + y^2 = r^2$$

II. v premaknjeni legi
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$



r… polmer
S… središče



presečišča z x osjo: $y = 0 \Rightarrow x = ?$
presečišča z y osjo: $x = 0 \Rightarrow y = ?$

Elipsa

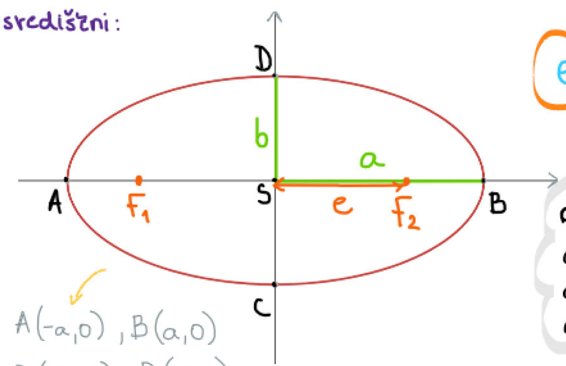
Implicitna enačba: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$; $A \neq B$ ter A in B imata isti predznak !

I. v središčni legi $\rightarrow S(0,0)$
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

II. v premaknjeni legi $\rightarrow S(p,q)$
$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1}$$

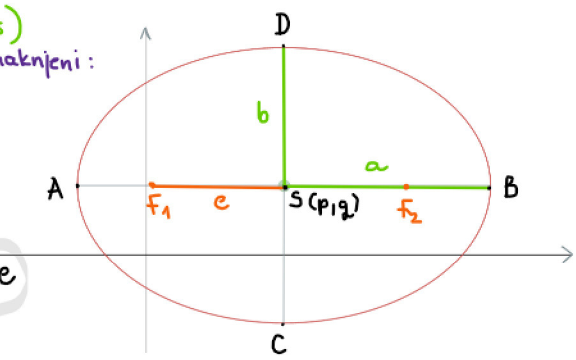
Ležeča elipsa: $a > b$ (a = velika polos, b = mala polos)

v središčni:



$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

v premaknjeni:



$A(-a,0)$, $B(a,0)$
$C(0,-b)$, $D(0,b)$
$F_1(-e,0)$, $F_2(e,0)$
$S(0,0)$

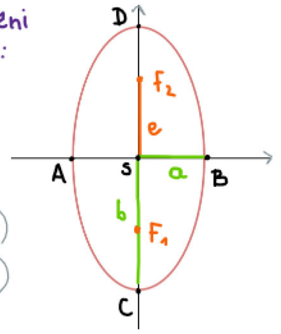
$d(S,F_1) = d(S,F_2) = e$
$d(A,B) = 2a$
$d(C,D) = 2b$
$d(F_1,F_2) = 2e$

VEDNO VELJA !

točke A, B, C, D so temena elipse, točka S je središče
F_1, F_2 … gorišči elipse (ležita vedno na veliki polosi)
e … linearna ekscentričnost (razdalja med goriščem in središčem)

Pokončna elipsa: $a < b$ (a = mala polos, b = velika polos)

v središčni legi:



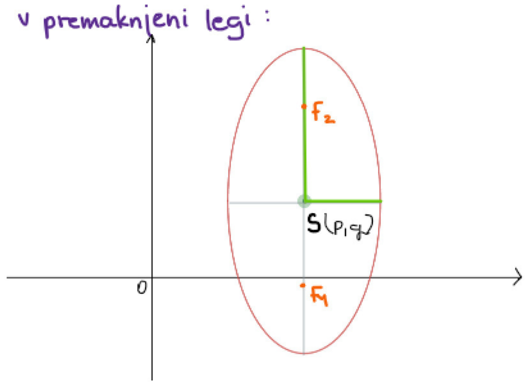
$F_1(0,-e)$
$F_2(0,e)$

Velja:

$e^2 = b^2 - a^2$

$\boxed{e = \sqrt{b^2 - a^2}}$

v premaknjeni legi:



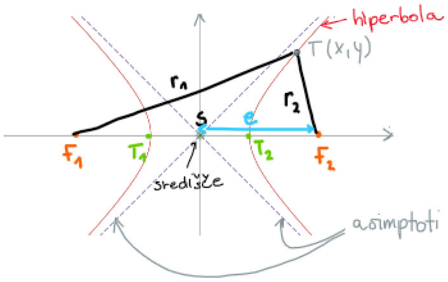
Še ena lastnost elipse:

NUMERIČNA EKSCENTRIČNOST $\longrightarrow$ $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{\text{velika polos}}}$ [nam pove, koliko je elipsa sploščena; $\varepsilon \in (0,1)$]

$\left[\begin{array}{l} a > b \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2} \\ a < b \Rightarrow e = \sqrt{b^2 - a^2} \end{array}\right]$

Hiperbola

je množica vseh točk T(x,y), kjer je razlika med razdaljama do obeh gorišč konstantna.



$\boxed{r_1 - r_2 = \text{konstanta}}$

S … središče

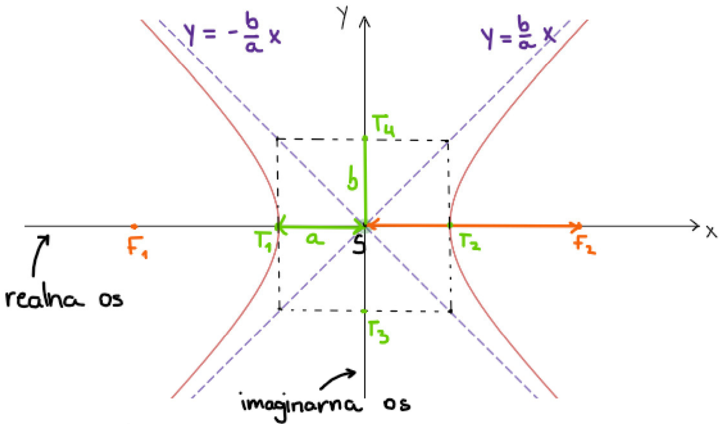
T_1, T_2 … temeni hiperbole

F_1, F_2 … gorišči hiperbole (vedno na realni osi)

e … linearna ekscentričnost

Splošna enačba: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ kvadratna člena imata različen predznak

I. tip: V središčni legi – z realno osjo na abscisni osi: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a, b > 0$



$F_1(-e,0)$ $T_1(-a,0)$ $T_3(0,-b)$
$F_2(e,0)$ $T_2(a,0)$ $T_4(0,b)$

$d(S,F_1) = d(S,F_2) = e$
$d(F_1,F_2) = 2e$

$d(S,T_1) = d(S,T_2) = a$
$d(S,T_3) = d(S,T_4) = b$
$d(T_1,T_2) = 2a$, $d(T_3,T_4) = 2b$

Velja:

$\boxed{e = \sqrt{a^2 + b^2}}$

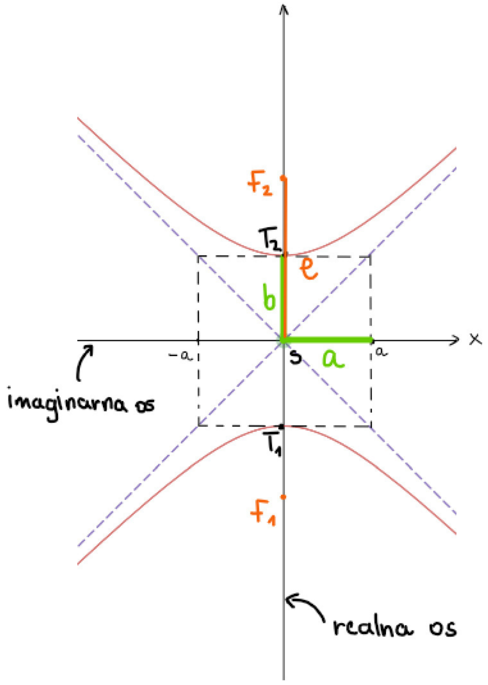
$\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$
numerična ekscentričnost

enačbi asimptot:

$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}x}$

I. tip

V središčni legi - z realno osjo na ordinatni (y) osi: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$



$T_1(-b, 0)$ $\quad$ $F_1(-e, 0)$

$T_2(b, 0)$ $\quad$ $F_2(e, 0)$

numerična ekscentričnost:

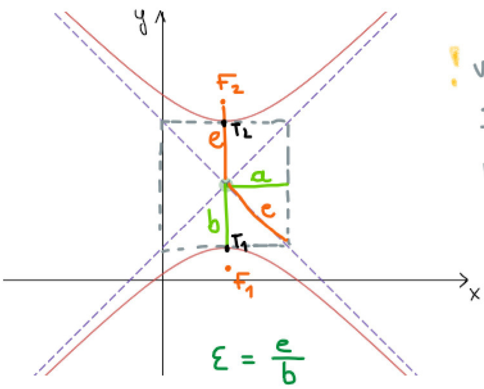
$$\varepsilon = \frac{e}{b} > 1$$

Vse druge lastnosti in formule so enake kot pri I. tipu hiperbole.

II. tip: V premaknjeni legi ⇒ središče: $S(p, q)$

a) $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1$

b) $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

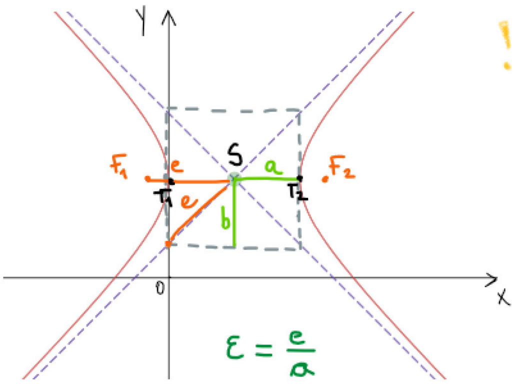


$\varepsilon = \frac{e}{b}$

! vse točke iz II. tipa so se premaknile v smeri (p, q)

↳ $F_1(p, -e+q)$

$F_2(p, e+q)$



$\varepsilon = \frac{e}{a}$

! vse točke iz I. tipa so se premaknile v smeri (p, q)

↳ $F_1(-e+p, q)$

$F_2(e+p, q)$

ENAČBI ASIMPTOT: $y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p)$

* sicer pa veljajo enaka pravila in formule kot pri I. in II. tipu

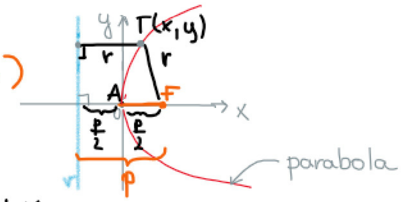
NASVET: koordinat točk pri premaknjeni stožnici se ne uči na pamet, ampak jih preberi z grafa (oz. upoštevaj premik za (p, q) iz središčne lege)

Parabola

je množica vseh točk T(x,y), ki so enako oddaljene od premice vodnice (v) in gorišča (F).

$$d(A,F) = \frac{p}{2} = d(A,v)$$
$$d(v,F) = p$$
$$d(T,v) = d(T,F) = \frac{p}{2} + x$$

abscisa poljubne točke na paraboli



A … teme
T … poljubna točka na paraboli
F … gorišče
v … premica vodnica
p … parameter parabole

Splošna enačba parabole (v implicitni obliki): I. $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ali

inverzna oblika (kvadratna funkcija)

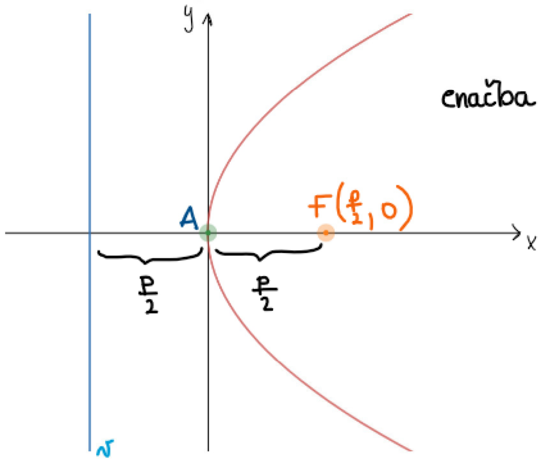
II. $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Parabola v središčni legi (teme je v koordinatnem izhodišču)

a) obrnjena v desno: $y^2 = 2px$ $(x > 0)$

zrcaljenje čez y os

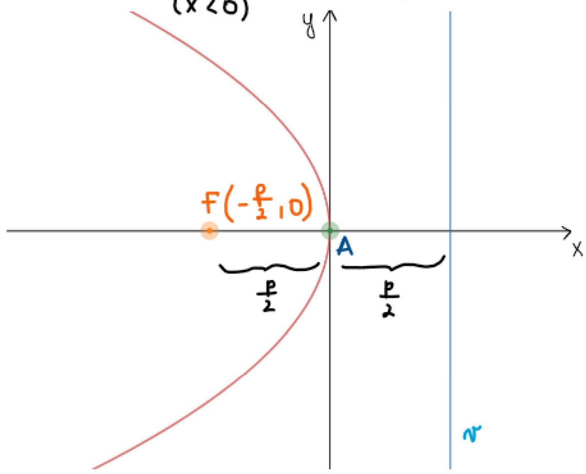
b) obrnjena v levo: $y^2 = -2px$ $(x < 0)$



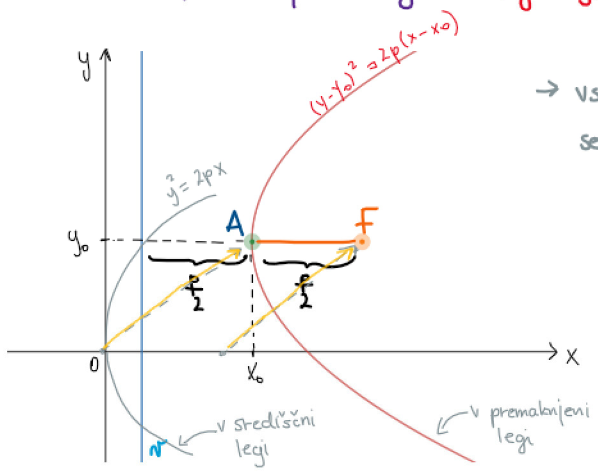
enačba premice vodnice v:

$$x = -\frac{p}{2}$$

$$d(F,v) = p$$



Parabola v premaknjeni legi: $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ (ko je graf obrnjen v desno)



→ vse točke parabole v središčni legi se premaknejo za vektor $\vec{s}(x_0, y_0)$

Teme je v točki: $A(x_0, y_0)$

Gorišče je v točki: $F\left(\frac{p}{2} + x_0,\ y_0\right)$

Enačba premice vodnice: $x = x_0 - \frac{p}{2}$

Trigonometrija

Kote označujemo v STOPINJAH [°] ali RADIANIH [rad].

Približek vrednosti števila „Pi":

$\pi \doteq 3{,}14$

$360° = 2\pi$

$180° = \pi$

$90° = \frac{\pi}{2}$

$60° = \frac{\pi}{3}$

$45° = \frac{\pi}{4}$

$30° = \frac{\pi}{6}$

Celoten krožni lok : 360° ali 2π rad

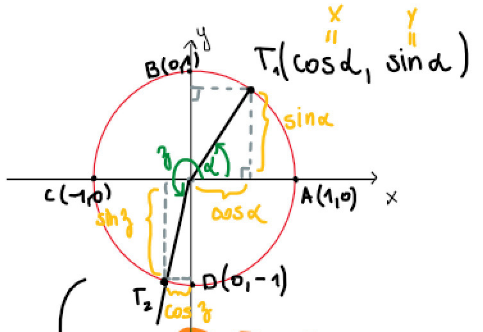
Polovica celotnega krožnega loka : 180° ali π rad

Pretvorba v splošnem :

iz stopinj v radiane: $x[°] = \frac{x° \cdot \pi}{180°}[rad]$

iz radianov v stopinje: $a[rad] = \frac{a \cdot 180}{\pi}[°]$

Enotska krožnica



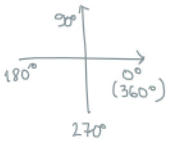
α = kot med pozitivnim poltrakom x osi ter izbranim poltrakom z začetno točko v koordinatnem izhodišču in seka enotsko krožnico v točki $T(\cos\alpha, \sin\alpha)$

x = koordinata, ki pove vrednost kosinusa ($\cos\alpha$)

y = koordinata, ki pove vrednost sinusa ($\sin\alpha$)

vidimo : $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$



$\alpha = 0°$: $A(\underset{\cos 0°}{1}, \underset{\sin 0°}{0})$

$\alpha = 90°$: $B(\underset{\cos 90°}{0}, \underset{\sin 90°}{1})$

$\alpha = 180°$: $C(\underset{\cos 180°}{-1}, \underset{\sin 180°}{0})$

$\alpha = 270°$: $D(\underset{\cos 270°}{0}, \underset{\sin 270°}{-1})$

Predznaki sinusa in kosinusa po kvadrantih :

$\sin\alpha$:

+	+
−	−

$\cos\alpha$:

−	+
−	+

2. kvadrant	1. kvadrant
3. kvadrant	4. kvadrant

Predznaki tangensa in kotangensa po kvadrantih :

$\tan\alpha$:

−	+
+	−

$\cot\alpha$:

−	+
+	−

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Prehod na ostri kot

[α ni oster , β je oster]

	II. kvadrant $\alpha = 180° - \beta$	III. kvadrant $\alpha = 180° + \beta$	IV. kvadrant $\alpha = 360° - \beta$
$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$-\sin\beta$	$-\sin\beta$
$\cos\alpha$	$-\cos\beta$	$-\cos\beta$	$\cos\beta$
$\tan\alpha$	$-\tan\beta$	$\tan\beta$	$-\tan\beta$
$\cot\alpha$	$-\cot\beta$	$\cot\beta$	$-\cot\beta$

Velja tudi :

$\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(360° + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(360° + \alpha) = \cot\alpha$

Tabela vrednosti kotnih funkcij za 'lepe' kote (I. kvadrant):

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞
$\cot\alpha$	∞	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

Vrednosti kotov, ki niso lepi, izračunamo s kalkulatorjem.

‚Lepi koti':
- večkratniki kota 30°
- večkratniki kota 45°

Zveze med kotnimi funkcijami in osnovne formule:

- Zveza med sinusom in kosinusom:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

- tangens in kotangens kota:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

- zveza med tangensom in kosinusom:

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

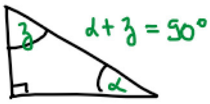
- zveza med kotangensom in sinusom:

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

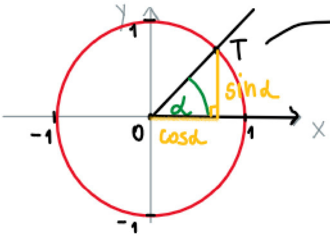
- če sta kota α in β komplementarna $\left[\begin{matrix}\alpha+\beta = 90° \\ \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right]$, velja:

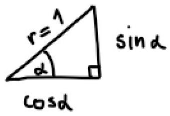
$$\cos\alpha = \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{=\sin\beta}$$

$$\sin\alpha = \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{=\cos\beta}$$



Sinus in kosinus



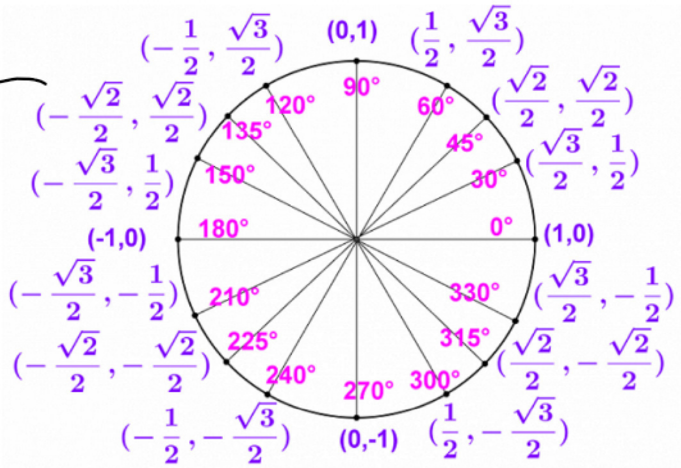


točka $T = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

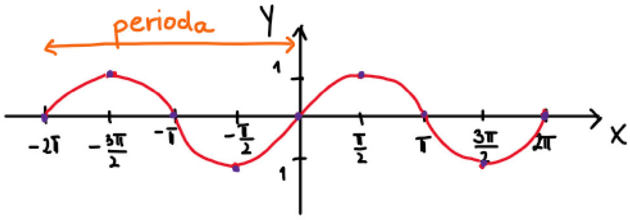
~ kosinus (y) in sinus (x) vseh ‚lepih' kotov:

npr. $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Funkcija sinus



Lastnosti:

- definicijsko območje D_f: $x \in \mathbb{R}$
- zaloga vrednosti Z_f: $[-1, 1]$
- ničle (kjer seka x os):

$\sin x = 0 \rightarrow x = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

$x = k \cdot \pi; \ k \in \mathbb{Z}$

pomeni da: $\sin(-\pi) = 0$, $\sin(0) = 0, \dots$

- maksimumi (najvišje vrednosti):

$\sin x = 1 \rightarrow x = \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$

- minimumi (najnižje vrednosti):

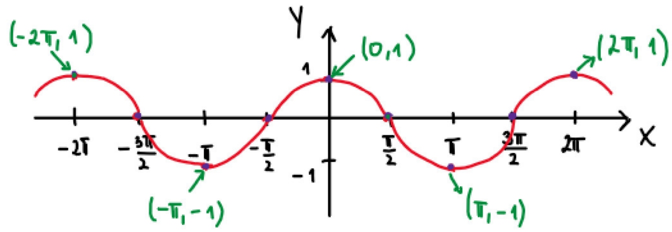
$\sin x = -1 \rightarrow x = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$

- funkcija sinus je LIHA:

$\sin(-x) = -\sin x$

Funkcija kosinus



Lastnosti:

- definicijsko območje D_f: $x \in \mathbb{R}$
- Z_f: $[-1, 1]$
- ničle:

$\cos x = 0 \rightarrow x = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \ k \in \mathbb{Z}$

pomeni, da: $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0, \dots$

- maksimumi:

$\cos x = 1 \rightarrow x = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$

$x = 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$

- minimumi:

$\cos x = -1 \rightarrow x = \dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$

$x = \pi + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$

- funkcija kosinus je SODA:

$\cos(-x) = \cos x$

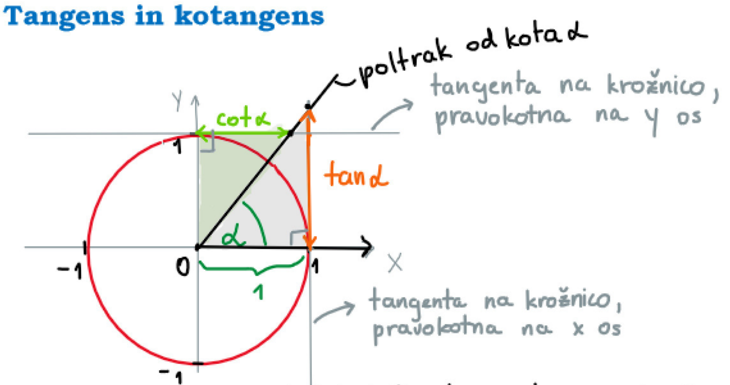
- funkciji sinus in kosinus sta zvezni (nista pretrgani)

OPOZORILO: vedno pazi na nastavitve v kalkulatorju (stopinje/radiani) pri računanju kotov

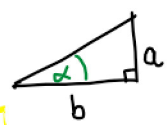
$\rightsquigarrow$ funkcija je LIHA, če velja: $f(-x) = -f(x)$ (simetrična glede na koordinatno izhodišče)

$\rightsquigarrow$ funkcija je SODA, če velja: $f(-x) = f(x)$ (simetrična glede na ordinatno os)

Tangens in kotangens



Spomni se pravokotnega Δ:

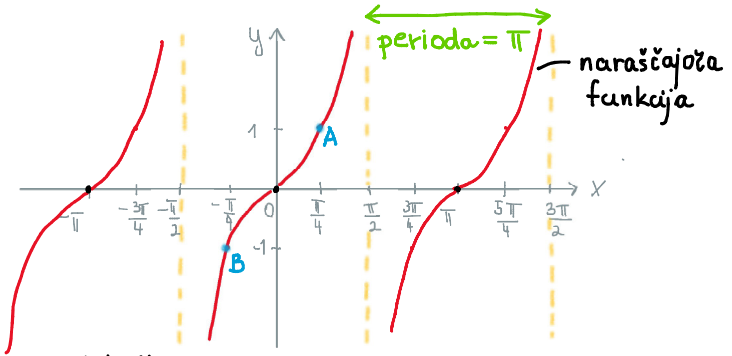


$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\cot\alpha = \frac{b}{a}$

$\rightsquigarrow$ razdalji od dotikališč tangent do točke, kjer tangenta seka poltrak sta ravno tangens in kotangens kota

Funkcija tangens



nekaj točk:

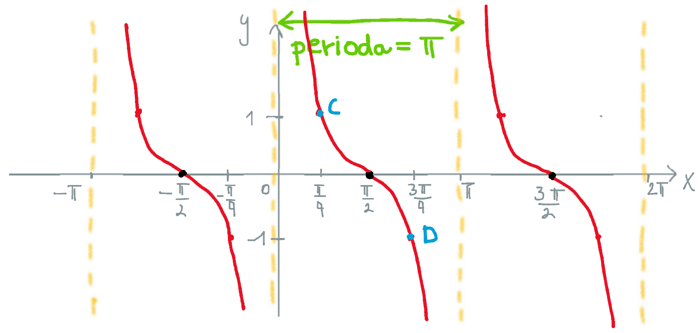
$A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$

↳ $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ↳ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

Lastnosti:

- D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in \mathbb{Z}$
  množica vseh polov
- Z_f: $x \in \mathbb{R}$
- izračun ničel:
  $\tan x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$
- ničle: $x = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$
  ↳ $x = k \cdot \pi; \ k \in \mathbb{Z}$
- izračun polov: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cos x = 0$
- poli: $x = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$
  ↳ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$
- Funkcija je liha: $\tan(-x) = -\tan x$
- je neomejena funkcija
- ni zvezna funkcija (pretrgana je v polih)

Funkcija kotangens



nekaj točk: $C\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $D\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

↳ $\cot\frac{\pi}{4} = 1$ ↳ $\cot\frac{3\pi}{4} = -1$

Lastnosti:

- D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}; k \in \mathbb{Z}$
  množica vseh polov
- Z_f: $x \in \mathbb{R}$
- izračun ničel:
  $\cot x = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$
- ničle: $x = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$
  ↳ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- izračun polov: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\sin x = 0$
- poli: $x = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$
  ↳ $x = k \cdot \pi; \ k \in \mathbb{Z}$
- Funkcija je liha: $\cot(-x) = -\cot x$
- je neomejena funkcija
- ni zvezna

To so bile lastnosti za funkcije sinus, kosinus, tangens in kotangens v osnovnem zapisu.

Ko rišemo grafe funkcij, so predpisi običajno v transformiranih oblikah (npr. f(x) = 2sin(x-π) +1). Pri risanju teh grafov uporabljamo pravila za transformacije grafov, ki pa so na voljo v posamezni datoteki.

Adicijski izreki

Funkcije dvojnih kotov

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha \xrightarrow{\sin(\alpha+\alpha)} \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \xrightarrow{\cos(\alpha+\alpha)} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\cdot\tan\beta} \xrightarrow{\tan(\alpha+\alpha)} \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Funkcije polovičnih kotov

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1-\cos x)}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1+\cos x)}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Funkcije trojnih kotov

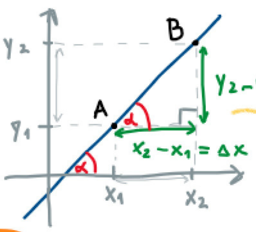
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Naklonski kot premice in kot med premicama

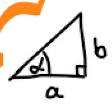
NAKLONSKI KOT PREMICE

Spomnimo se linearne funkcije → graf je premica in njen naklon je določen s smernim koeficientom k, ki pa je enak:



$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

kjer sta $A(x_1,y_1)$ in $B(x_2,y_2)$ poljubni točki na premici



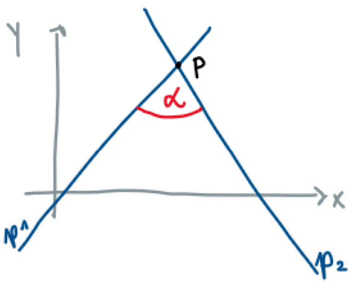
iz pravokotnega trikotnika vemo: $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

Torej velja:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k \rightsquigarrow \alpha = \tan^{-1}(k)$$

kjer je kot α naklonski kot premice (kot med premico in osjo x)

KOT MED PREMICAMA



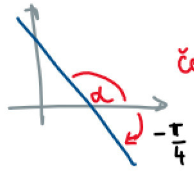
Če imata premici smerna koeficienta k_1 in k_2, potem kot med premicama izračunamo po enačbi

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \rightsquigarrow \alpha = \tan^{-1}(\ldots)$$

Posebnosti:

- če je kot pravi (90°), dobimo rezultat $\tan\alpha = \infty$ (error v kalkulatorju)
- če dobimo negativno vrednost kota v kalkulatorju, ji moramo še prišteti 180°, da dobimo končno rešitev, ki je pozitivna.

npr.



če je α topi kot, dobimo neg. rešitev

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + 180°$

- če imata premici enak smerni koeficient, sta VZPOREDNI: $k_1 = k_2$

  $\tan\alpha = 0$ in $\alpha = 0$

- kadar sta premici PRAVOKOTNI, velja: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$