

## Aritmetično in geometrijsko zaporedje

1. Pri katerem aritmetičnem zaporedju je vsota petega in šestega člena 44, produkt teh členov pa 480?

2. Za kakšen  $x$  je dano končno zaporedje aritmetično?

$$\sqrt{x}, \sqrt{5x-4}, 3\sqrt{x}$$

3. V geometrijskem zaporedju je količnik enak 3, vsota prvih treh členov pa 130. Zapiši prvi člen tega geometrijskega zaporedja.

4. Določi geometrijsko zaporedje, če je vsota četrtega in tretjega člena 504, razlika pa 360.

5. Razčleni število 45 na tri člene, ki oblikujejo aritmetično zaporedje. Če srednjemu členu odštejemo tri, prvo in tretje pa ohranimo, dobimo geometrijsko zaporedje.

6. Vsota  $n$  členov aritmetičnega zaporedja je 420, diferenca je  $-20$  in zadnji člen je enak nič. Zapiši to aritmetično zaporedje.

7. V aritmetičnem zaporedju je vsota prvih  $n$  členov 22, vsota prvih  $n+2$  členov pa 51. Zapiši to aritmetično zaporedje, če veš, da je diferenca zaporedja enaka tri.

8. Izračunaj vsoto prvih dvajset členov aritmetičnega zaporedja, za katerega veš, da velja

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

9. Med števili 34 in 118 vrini enajst členov aritmetičnega zaporedja. Kolikšna je diferenca tega aritmetičnega zaporedja in kolikšna je vsota vrinjenih členov?

1.  $a_5 + a_6 = 44$   $a_n = ?$

AZ  $a_5 \cdot a_6 = 480$

• najprej moramo ugotoviti kateri dve števili dajata vsoto 44, zmnožek pa 480

$$\begin{array}{l} x + y = 44 \\ x \cdot y = 480 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 24 \\ y = 20 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \text{ni določeno} \\ \} \text{kateri je} \\ \} \text{kateri} \end{array} \right\}$$

I. možnost

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 20 \\ a_6 = 24 \end{array} \right\} d = a_6 - a_5 = 4$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_5 &= a_1 + 4 \cdot d = a_1 + 16 \\ 20 &= a_1 + 16 \\ a_1 &= 4 \end{aligned}$$

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 4n$$

I. možnost

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 24 \\ a_6 = 20 \end{array} \right\} d = -4$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_5 &= a_1 + 4 \cdot d = a_1 - 16 \\ 24 &= a_1 - 16 \\ a_1 &= 40 \end{aligned}$$

$$a_n = 40 - 4 \cdot (n-1)$$

$$a_n = 36 - 4n$$

Aritmetično zaporedje:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$a_1 \dots$  1. člen  
i  
 $a_n \dots$  n-ti člen

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

diferenca

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

splošni člen

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

vsota prvih n členov zaporedja

Geometrijsko zaporedje:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$a_2 = a_1 \cdot k$$

$$a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k^2$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

količnik med zaporedhima členoma

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$$

vsota prvih n členov zaporedja

2. AZ

$$\sqrt{x}, \sqrt{5x-4}, 3\sqrt{x}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$   
 $\xrightarrow{+d} \quad \xrightarrow{+d}$

$x = ?$

$$d = \sqrt{5x-4} - \sqrt{x}$$

$$d = 3\sqrt{x} - \sqrt{5x-4} \quad \left. \vphantom{d = 3\sqrt{x} - \sqrt{5x-4}} \right\} \text{enačimo}$$

$$\sqrt{5x-4} - \sqrt{x} = 3\sqrt{x} - \sqrt{5x-4} \quad \text{uredimo}$$

$$\sqrt{5x-4} + \sqrt{5x-4} = 3\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{5x-4} = 4\sqrt{x} \quad \left| \cdot \right. \text{ rešimo korensko enačbo}$$

$$4 \cdot (5x-4) = 16 \cdot x$$

$$20x - 16 = 16x$$

$$20x - 16x = 16$$

$$4x = 16$$

$$\underline{x = 4}$$

preizkus rešitve:  $2\sqrt{16} = 4\sqrt{4}$   
 $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$   
 $L = D \quad \checkmark$

4. GZ

$$a_3 + a_4 = 504$$

$$a_4 - a_3 = 360$$

$k = ? \quad a_1 = ? \quad a_n = ?$

rešimo kot sistem enačb (2x2):

$$\left. \begin{array}{l} a_4 + a_3 = 504 \\ a_4 - a_3 = 360 \end{array} \right\} +$$


---

$$2a_4 + 0 = 864$$

$$2a_4 = 864$$

$$\underline{a_4 = 432}$$

vstavimo  $a_4$  v eno od enačb:  $a_3 + a_4 = 504$   
 $a_3 = 504 - a_4$   
 $a_3 = 504 - 432$   
 $\underline{a_3 = 72}$

Vemo:

$$a_3 \cdot k = a_4$$

$$72 \cdot k = 432$$

$$k = \frac{432}{72}$$

$$\boxed{k = 6}$$

$$a_3 = a_1 \cdot k^2$$

$$72 = a_1 \cdot 6^2$$

$$a_1 = \frac{72}{36}$$

$$\boxed{a_1 = 2}$$

REŠITEV:  $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$   
 $\underline{a_n = 2 \cdot 6^{n-1}}$

8. Izračunaj vsoto prvih 20 členov AZ, za katerega veš, da velja  $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) \quad n=20 \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20})$$

pri aritmetičnem zaporedju velja:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Torej:  $a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \dots$

$$= a_4 + a_{17} = a_5 + a_{16} = \boxed{a_6 + a_{15}}$$

$$= \dots = \boxed{a_9 + a_{12}}$$

mora biti enaka vsota

$$\begin{aligned} & a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20 \\ & \downarrow \\ & a_1 + 5d + a_1 + 8d + a_1 + 11d + a_1 + 14d = 20 \end{aligned}$$

$$4a_1 + 28d = 20$$

NE GRE NA TA NAČIN, preveč neznanck in premalo podatkov

$$\underbrace{a_6 + a_{15}}_{10} + \underbrace{a_9 + a_{12}}_{10} = 20$$

to pomeni, da tudi  $a_1 + a_{20} = 10$  :

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20})$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot 10$$

$$\underline{\underline{S_{20} = 100}}$$

10. Vsota členov geometrijskega zaporedja s količnikom dva je enaka 3577, šestni člen zaporedja pa je 224. Koliko členov ima zaporedje?

11. Če v geometrijskem zaporedju s količnikom dva odštejemo prvemu členu ena, tretjemu pa dva, dobimo aritmetično zaporedje. Zapiši geometrijsko zaporedje.

12. Če v aritmetičnem zaporedju z diferenco štiri prištejemo prvemu členu ena, trtejmu pa dva, dobimo geometrijsko zaporedje. Zapiši aritmetično zaporedje.

13. Vsota vseh členov geometrijskega zaporedja brez prvega člana je 63, vsota vseh členov brez zadnjega pa 126. Zapiši to zaporedje, če veš, da je  $a_4 = 8$ .

11.

GZ:  $a_1, a_2, a_3, \dots$   $k=2$  2. člen GZ  $a_2 = 2 \cdot a_1$  3. člen GZ  $a_3 = 2 \cdot a_2 = 4 \cdot a_1$   $a_1 = ?$   $a_n = ?$

↓ -1      ↓ -1      ↓ -1

AZ:  $a_1 - 1, a_2, a_3 - 2, \dots = \overbrace{a_1 - 1}^{m_1}, \overbrace{2a_1}^{m_2}, \overbrace{4a_1 - 2}^{m_3}, \dots$

1. člen AZ    2. člen AZ    3. člen AZ

v AZ velja:  $m_2 - m_1 = m_3 - m_2$

$$2a_1 - (a_1 - 1) = 4a_1 - 2 - 2a_1$$

$$a_1 + 1 = 2a_1 - 2$$

$$1 + 2 = 2a_1 - a_1$$

$$\boxed{3 = a_1} \quad \text{1. člen GZ}$$

REŠITEV:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

$$\underline{\underline{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}}$$

13.  
Gž

$S_n - a_1$  (je vsota prvih  $n$  členov, zmanjšana za 1. člen)

I.  $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = 63$

$a_4 = 8$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

II.  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 126$

$a_1 \cdot k^3 = 8$

$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

$a_1 = ?$   $k = ?$   $a_n = ?$

$S_{n-1}$  (je vsota prvih  $n-1$  členov)

rešiti moramo sistem treh enačb (3 x 3) :

I.

$S_n - a_1 = 63$

$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} - a_1 = 63$

$a_1 \cdot \left( \frac{k^n - 1}{k - 1} - 1 \right) = 63 \quad | \cdot 2$

$2 a_1 \cdot \left( \frac{k^n - 1}{k - 1} - 1 \right) = 126$

II.

$S_{n-1} = 126$

$a_1 \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1} = 126$

da lahko izenačimo I. in II.

$2 \cdot (S_n - a_1) = S_{n-1}$

$2 a_1 \cdot \left( \frac{k^n - 1}{k - 1} - 1 \right) = a_1 \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1}$

$2 a_1 \cdot \left( \frac{k^n - 1 - k + 1}{k - 1} \right) = a_1 \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1} \quad | : a_1 \quad | : (k - 1)$

izpostavimo  $k$   $2 \cdot (k^n - k) = k^{n-1} - 1$

$2 \cdot k \cdot (k^{n-1} - 1) = k^{n-1} - 1 \quad | : (k^{n-1} - 1)$

$2k = 1$

$k = \frac{1}{2}$

$\rightarrow a_4 = a_1 \cdot k^3 = 8$

$a_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^3 = 8$

$a_1 \cdot \frac{1}{8} = 8 \quad | \cdot 8$

$a_1 = 8 \cdot 8$

$a_1 = 64$

Rešitev :  $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$   
 $a_n = 64 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$

ALI

$a_n = \frac{64}{2^{n-1}}$

Več nalog, razlag in formul na [instrukcijeonline.com](http://instrukcijeonline.com)

