

# Pregled elementarnih funkcij

1. Skiciraj grafe polinomov.

- (a)  $p(x) = -2(x-1)^2(x+1)$ ; kje je  $p(x) \geq 0$ ?
- (b)  $p(x) = x^5 - 4x^3 + 4x$  (razcep in kandidati za ničle) - DELNO REŠENA

2. Poišči rešitve polinomske neenačbe  $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3 \geq 0$

3. Skiciraj grafe racionalnih funkcij. (reši podobno kot 1. a primer)

- (a)  $f(x) = \frac{(x^2-9)(x^2-4x+4)}{(x^2-1)(x^2-x-20)}$
- (b)  $f(x) = \frac{2x^2-3x-3}{x^2-4}$
- (c)  $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$
- (d)  $f(x) = \frac{x^4-2x^3+x^2}{x^3-2x^2+x-2}$
- (e)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

S... ničla sode stopnje  
L... ničla lihe stopnje

**POLINOM:**  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$   
 (vodični koeficient)  $(a_n \in \mathbb{R})$  n... stopnja polinoma  
 (prosti člen (začetna vrednost))  
 $p(x) = a(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$   
 $x_1, \dots, x_n$  so ničle polinoma

**RACIONALNA F.:** (količnik dveh polinomov)  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} ; q(x) \neq 0$

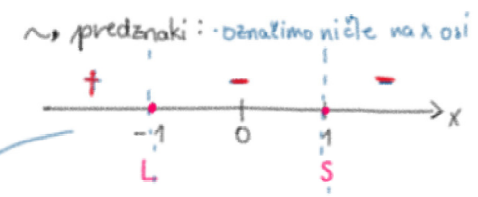
vedoravna asimptota(y):

- če je stopnja  $p(x)$  manjša od stopnje  $q(x)$ , potem je  $y=1$
- če sta stopnja enaki, potem delimo glavna koeficienta polinomov
- če je stopnja  $p(x)$  večja od stopnje  $q(x)$ , polinoma delimo, da dobimo enačbo asimptote

1. a)  $p(x) = -2(x-1)^2(x+1)$

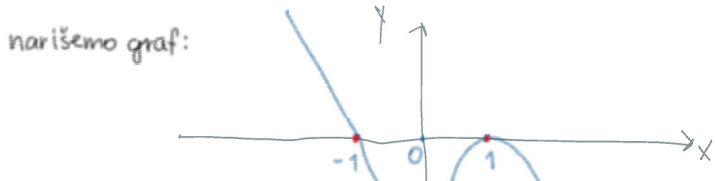
ničle:  $p(x) = 0$   
 (Točke na x osi)  
 $-2(x-1)^2(x+1) = 0$   
 (soda ničla)  
 $x_{1,2} = 1$     $x_3 = -1$

začetna vrednost:  $f(0) = -2(0-1)^2(0+1) = -2$   
 (Točka na y osi)



namesto x vstaviš 0  
 imamo 3 območja, kjer dobimo predznak funkcije

$f(0) = -2$  (neg.)  
 Za vse  $x$  med  $-1$  in  $1$  je funkcija negativna  
 ker pri ničli sode stopnje funkcija ohrani predznak, za vse  $x > 1$  tudi negativna



kdaj je  $p(x) \geq 0$ ? (vse kar je nad osjo x in na osi x)  
 $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$  (rešitev preberemo z grafa ali pa si pomagamo s predznaki)

b)  $p(x) = x^5 - 4x^3 + 4x$

ničle:  $p(x) = 0$   
 $x^5 - 4x^3 + 4x = 0$   
 $x(x^4 - 4x^2 + 4) = 0$   
 to rešimo s pomočjo Hornerjevega algoritma

$d = \pm 1$     $c = \pm 1, \pm 2, \pm 4$   
 $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$   
 kandidati za ničle:  $1, -1, 2, -2, 4, -4$   
 (vstavljamo)   nobena od celih ničel ne ustreza

ničle poiščemo, da rešimo enačbo s pomočjo Vietovega pravila:

$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$     $x^2 = m$   
 $m^2 - 4m + 4 = 0$   
 $(m-2)(m-2) = 0$   
 $m_{1,2} = 2$  (dvojna rešitev!)  
 $x^2 = 2$   
 $x = \pm \sqrt{2}$   
 $x_{2,3} = \sqrt{2}$     $x_{4,5} = -\sqrt{2}$   
 morajo biti tudi dvojne rešitve



$x_1 = 0$

3. a)  $f(x) = \frac{\overbrace{(x^2-9)(x^2-4x+4)}^{p(x)}}{\underbrace{(x^2-1)(x^2-x-20)}_{q(x)}} \left[ = \frac{\overbrace{1x^4 \dots}^{\text{vodilni koef}}}{\underbrace{1x^4 \dots}_{\text{vodilni koef}}} \right] \rightarrow \text{polinoma sta enakih stopenj}$

① ničle:  $p(x) = 0$

razstavimo:  
 $(x^2-9)(x^2-4x+4) = 0$   
 $(x-3)(x+3)(x-2)^2 = 0$

$x_1 = 3$   $x_2 = -3$   $x_{3,4} = 2$  (S)  
 (L) (L)

② poli:  $q(x) = 0$

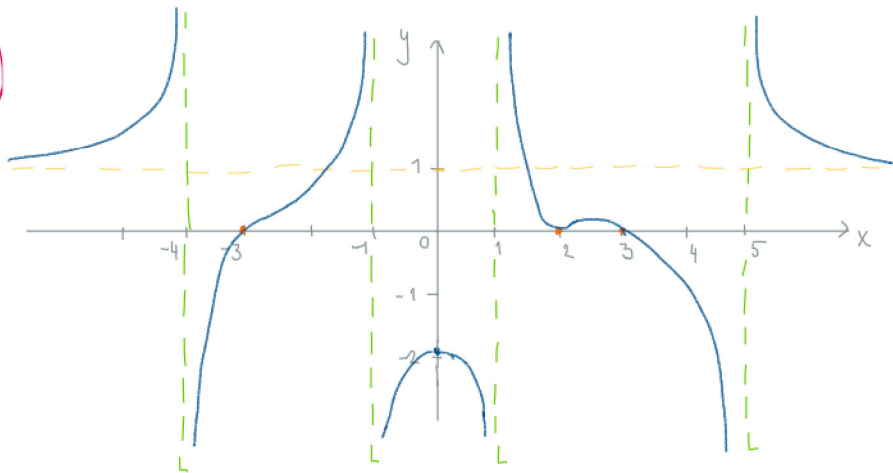
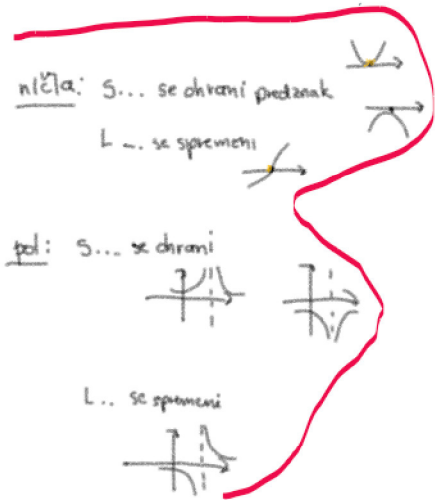
$(x^2-1)(x^2-x-20) = 0$   
 $(x-1)(x+1)(x-5)(x+4) = 0$

$x_1 = 1$   $x_2 = -1$   $x_3 = 5$   $x_4 = -4$   
 (L) (L) (L) (L)

③ vodoravna asimptota:  $\frac{1}{1} = 1$   
 vodilna koeficienta delimo,  
 če sta polinoma enakih stopenj)  $y = 1$

④ začetna vrednost:  $f(0) = \frac{-9 \cdot 4}{-1 \cdot (-20)}$

$f(0) = -\frac{9}{5}$



c)  $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$

① ničle:  $x(x-2)^2 = 0$

$x_1 = 0$   $x_{2,3} = 2$

② poli:  $x^2 + 1 = 0$

enačba je nerazcepna v IR, nima rešitev v IR  
 NI POLOV!

④ začetna vrednost:  $f(0) = \frac{0}{1} = 0$   
 (presečišče z y osjo)

③ vodoravna asimptota:  $f(x) = \frac{x(x^2-4x+4)}{x^2+1} = \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2+1}$

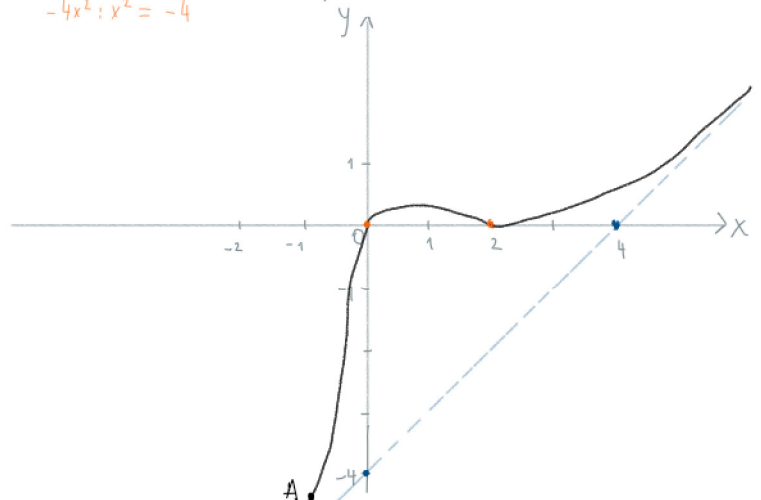
stopnja polinoma v števcu je večja kot v imenovalcu, zato moramo polinoma deliti

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + 4x) : (x^2 + 1) = x - 4 \\ \underline{-(x^3 + x)} \phantom{+ 4} \\ -4x^2 + 3x \phantom{+ 4} \\ \underline{-(-4x^2 - 4x)} \phantom{+ 4} \\ 7x + 4 \end{array}$$

enačba vodoravne asimptote  
 $y = x - 4$

$x^3 : x^2 = x$   
 $-4x^2 : x^2 = -4$

dobljeni količnik bo enačba vodoravne asimptote



Pomagamo si z dodatno točko:

npr.  $f(-1) = \frac{-1 \cdot 9}{2} = -4.5$

$A(-1, -4.5)$

4. Kdaj bo  $y > 0$ , za  $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ?

5. Poišči rešitev racionalne neenačbe  $\frac{x^3-x^2}{x^2-6x+9} \geq 0$ .

nariši in preberi rešitev z grafa

6. Skiciraj grafe korenskih funkcij.

(a)  $f(x) = \sqrt{x+1}$

(b)  $f(x) = \sqrt{-x+1}$

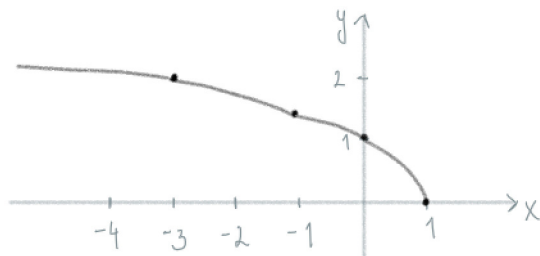
(c)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

(d)  $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

6. b)  $f(x) = \sqrt{-x+1}$

Definicijsko območje:  $-x+1 \geq 0$   
 $1 \geq x$   
 $x \leq 1$

x	y
1	0
0	1
-1	$\sqrt{2}$
-3	2



d)  $f(x) = x\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x^2 \cdot (2-x^2)}$  *pod skupni koren*

Definicijsko območje:  $x^2 \cdot (2-x^2) \geq 0$  rešimo neenačbo

$x^2 \cdot (2-x^2) = 0$

$x_{1,2} = 0$

$2-x^2 = 0$

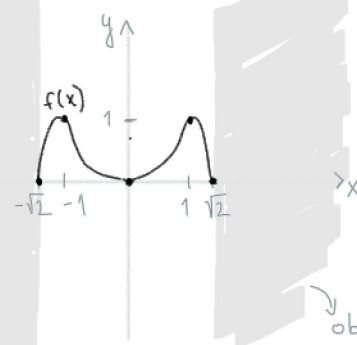
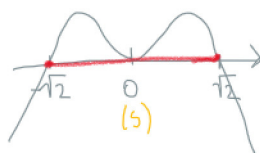
$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x_3 = \sqrt{2}$   $x_4 = -\sqrt{2}$

$x_{1,2}, x_3, x_4$  so ničle funkcije

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  tu je funkcija definirana



obarvana dela nista v definicijskem območju

dodatni točki:  $f(1) = 1$

$f(-1) = 1$

7. Skiciraj grafe eksponentnih funkcij.

(a)  $f(x) = e^{x+1} + 1$

(b)  $f(x) = -3^{-x+2} + 1$

(c)  $f(x) = e^{x+2} - 2$

8. Skiciraj grafe logaritemske funkcije.

(a)  $f(x) = 2 \log_2(x+2) - 1$

(b)  $f(x) = -\frac{1}{2} \ln x + 3$

(c)  $f(x) = 2 \log(x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}$

9. Skiciraj grafe trigonometričnih funkcij.

(a)  $f(x) = |\sin x|$

(b)  $f(x) = 4 \cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4})$

(c)  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x + \pi) - \frac{1}{2}$

7. b)

$$f(x) = -3^{-x+2} + 1$$

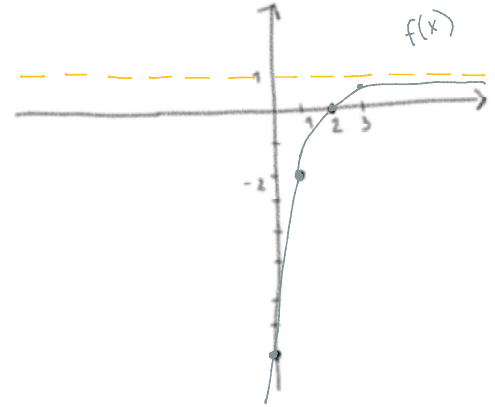
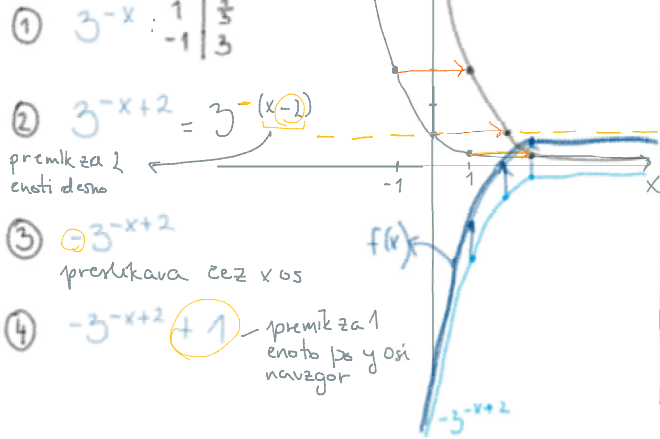
vodoravna  
asimptota

Graf lahko narišemo po korakih

ALI

direktno  
izračunamo točke  
in narišemo graf

x	y
0	-8
1	-2
2	0
-1	-26
3	$\frac{1}{3}$



8. c)

$$f(x) = 2 \cdot \log\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

narišemo v 4 korakih:

①  $\log(x)$   
 $x=0$  asimptota  $2 \mid \log 2 \doteq 0,3$   
 $x = \frac{1}{2}$  navpična asimptota

②  $\log\left(x - \frac{1}{2}\right)$   
 $x = \frac{1}{2}$  asimptota

③  $2 \cdot \log\left(x - \frac{1}{2}\right)$   
 $2 \mid \log 2 = 0,6$   
 razteg po y osi (vsak y pomnožiš z 2)

④  $2 \cdot \log\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$   
 premik po y navzgor za  $\frac{3}{2}$

rešena ničla:

$$2 \cdot \log\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

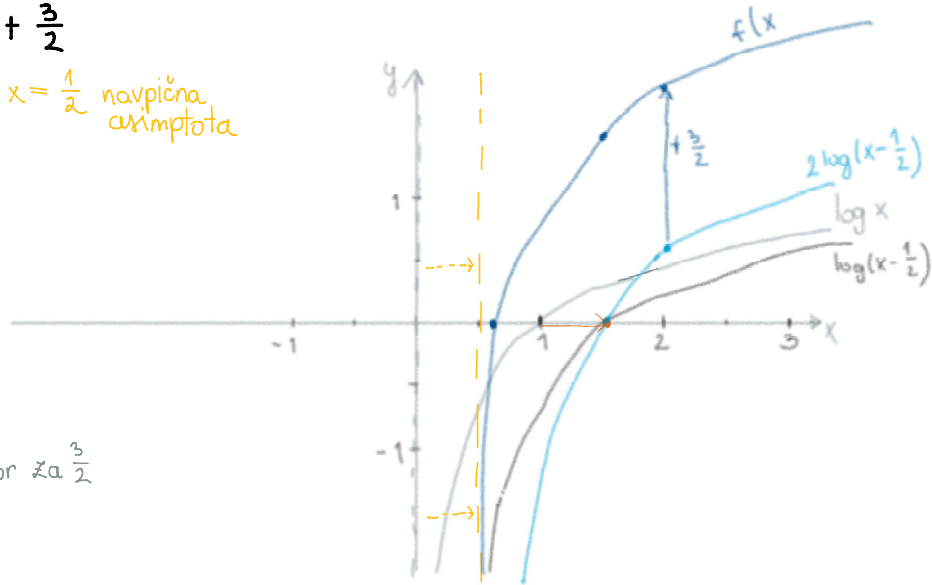
$$2 \cdot \log\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\log\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$10^{-\frac{3}{4}} = x - \frac{1}{2}$$

$$10^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} = x$$

$$x \doteq 0,53$$

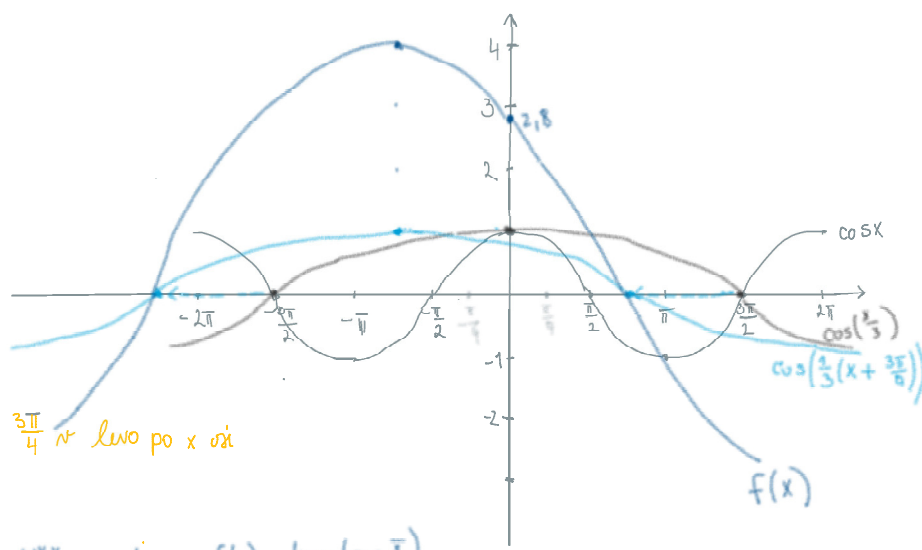


9. b)  $f(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

rešimo v 4 korakih:

- ①  $\cos x$  (osnovna funkcija)
- ②  $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$  razteg po x osi ( $\rightarrow x$ )  
izpostavimo
- ③  $\cos\left(\frac{1}{3}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$   
premike za  $\frac{3\pi}{4}$  levo po x osi
- ④  $4\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$   
razteg po y osi  
(vsaki y pomnoži s 4)

prečišče z osjo y:  $f(0) = 4\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2,8$



Več nalog, razlag in formul na [instrukcijeonline.com](http://instrukcijeonline.com)

