**Enačbe in neenačbe (ponovitev SŠ)**

1. Poišči rešitve linearnih enačb.
   (a) $\frac{2x}{5} - 7 + 2x = \frac{2}{3} - x$
   (b) $(x-5)^2 + (x-3)(x+3) + 4 = 5 - (2x-1)(-x)$
   (c) $-1 = (x-2)(x+2) - (x-1)^2$
2. Poišči rešitve linearnih neenačb.
   (a) $3 - 3(x+1) > 9$
   (b) $x^2(x+9) - (x+3)^3 > 27$
   (c) $5 - 2x \leq (1+2x)^2 - (1-2x)^2$

1. a) $\frac{2x}{5} - 7 + 2x = \frac{2}{3} - x$

! $\frac{2x}{5} = \frac{2}{5} \cdot x$

$\frac{2}{5}x + 2x + 1x = \frac{2}{3} + 7$

$\frac{17}{5}x = \frac{23}{3} \quad / : \frac{17}{5}$

$x = \frac{115}{51}$

2. a) $3 - 3(x+1) > 9$

$\cancel{3} - 3x - \cancel{3} > 9$

$-3x > 9 \quad / : (-3)$

! pri množenju/deljenju z negativnim številom se neenačaj obrne

$x < -3$

c) $5 - 2x \leq \underbrace{(1+2x)^2}_{(a+b)^2} - \underbrace{(1-2x)^2}_{(a-b)^2}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$5 - 2x \leq 1 + 4x + 4x^2 - (1 - 4x + 4x^2)$

$5 - 2x \leq \cancel{1} + 4x + \cancel{4x^2} - \cancel{1} + 4x - \cancel{4x^2}$

$-2x - 4x - 4x \leq -5$

$-10x \leq -5$

$x \geq \frac{1}{2}$

* Linearne se imenujejo zato, ker se vsi členi z višjimi eksponenti od 1 izničijo

3. Poišči rešitve sistemov linearnih enačb.

(a) $y = -3x + 1$ in $y = x + 5$

(b) $y = -5x - 2$ in $x - y = 2$

4. Poišči rešitve kvadratnih enačb.

(a) $3x^2 - 27 = 0$

(b) $(x-5)^2 = 1$

(c) $4x(x+5) - (3x-5)(3x+5) = 54 - (2x-7)^2$

(d) $(x-2)^2 + (3x-1)^2 - x = (1+4x)^2 - 21$

(e) $(x-5)(x+2) + (x-6)(x-1) = (x-4)(x+1)$

5. Poišči rešitve kvadratnih neenačb.

(a) $(3x-1)^2 - (x^2+2) \leq 2x - 3$

(b) $2x^2 - x - 2 > 3x^2 + 1$

kvadratna enačba v splošnem:

$ax^2 + bx + c = 0$ — ① vietovo pravilo ALI ② s pomočjo diskriminante

· če je $b = 0$: $ax^2 + c = 0$

izpostavimo in razstavimo, ali pa izrazimo $x^2$ iz enačbe in korenimo

· če je $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$

izpostavimo skupni faktor in izpišemo rešitve

$D = b^2 - 4ac$ diskriminanta

D>0: dve različni rešitvi

D=0: ena dvojna rešitev

D<0: ni rešitev v realnih številih

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ obrazec za rešitve

3. b) $y = -5x - 2$ in $x - y = 2$

I. način: uredimo: rešujemo z metodo nasprotnih koeficientov

$$\begin{aligned} y + 5x &= -2 \\ +\ \ -y + x &= 2 \\ \hline 0 + 6x &= 0 \\ 6x &= 0 \quad /:6 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

členi so v enakem zaporedju v obeh enačbah

vstavimo v eno izmed enačb

$y + 5 \cdot 0 = -2$

$y = -2$

II. način: rešujemo na zamenjalni način

$y = -5x - 2$ neznanko izrazimo (v tem primeru je že) in vstavimo v drugo enačbo

$x - y = 2$

$x - (-5x - 2) = 2$

$x + 5x + 2 = 2$

$6x = 2 - 2$

$6x = 0$

$x = 0$

$0 - y = 2$

$y = -2$

4. a) $3x^2 - 27 = 0$

$3(\underbrace{x^2 - 9}_{a^2-b^2}) = 0$ — $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$3(x-3)(x+3) = 0$

$x_1 = 3$ $\quad x_2 = -3$

c) $4x(x+5) - \overbrace{(3x-5)(3x+5)}^{(a-b)\cdot(a+b)} = 54 - (2x-7)^2$

$4x^2 + 20x - (\overbrace{9x^2 - 25}^{a^2 - b^2}) = 54 - (4x^2 - 28x + 49)$

$4x^2 + 20x - 9x^2 + 25 = 54 - 4x^2 + 28x - 49$

$4x^2 + 4x^2 - 9x^2 + 20x - 28x + 25 - 54 + 49 = 0$

$-x^2 - 8x + 20 = 0 \quad / \cdot (-1)$

$x^2 + 8x - 20 = 0$ $\quad 10 + (-2) = 8$, $\quad 10 \cdot (-2) = -20$

Vietovo pravilo: $(x+10)(x-2) = 0$ $\quad x_1 = -10$ $\quad x_2 = 2$

pri kvadratnih enačbah in neenačbah damo vse člene na eno stran in na drugi strani je 0.

5. a) $(3x-1)^2 - (x^2+2) \le 2x-3$

$(9x^2-6x+1) - x^2 - 2 \le 2x-3$

$9x^2 - 6x + 1 - x^2 - 2 - 2x + 3 \le 0$

$8x^2 - 8x + 2 \le 0 \quad /:2$

* $\boxed{4x^2 - 4x + 1 \le 0}$

najprej reši kot ENAČBO: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

I. razstavimo: $(2x-1)(2x-1) = 0$

$2x-1=0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$x_{1,2} = \frac{1}{2}$

ALI

II. rešimo s pomočjo obrazca: $D = b^2 - 4ac$

$D = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 1$

$D = 16 - 16 = 0$

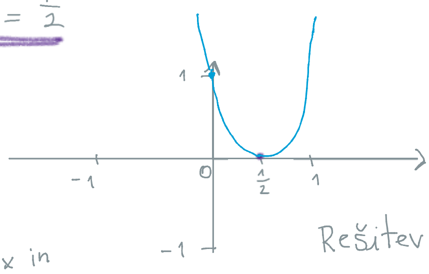
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4}{2\cdot 4} =$

$x_{1,2} = \frac{1}{2}$

nato narišemo skico kvadratne funkcije (narišemo $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ in gledamo kje je * $4x^2 - 4x + 1 \le 0$)

↓

kateri del f. pod osjo x in na sami x osi




Rešitev: $x \in \{1\}$

intervale/rešitve beremo vedno z osi x

pod osjo x ni ničesar, na x osi je samo točka v $x = \frac{1}{2}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| strogo nad x osjo | $>0$ | nad osjo x ter na x osi | $\ge 0$ |
| strogo pod x osjo | $<0$ | pod osjo x ter na x osi | $\le 0$ |

6. Poišči rešitve sistemov neenačb.

(a) $x^2 - 11x + 24 < 0$ in $-x^2 + 5x + 14 > 0$

(b) $x(x-4) \le 5$ in $4 - 2x > 0$ in $x \ge 0$

7. Poišči rešitve racionalnih enačb.

(a) $x - \frac{x+10}{x+3} = 2$

(b) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{64}{x^2-16}$

8. Poišči rešitve racionalnih neenačb.

(a) $\frac{x-3}{x^2+x-2} \le 0$

(b) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+2x-8} > 0$

6. b) $\underbrace{x(x-4) \leq 5}_{①}$ in $\underbrace{4-2x>0}_{②}$ in $\underbrace{x \geq 0}_{③}$

Rešujemo vsako posebej

① $x^2 - 4x \leq 5$

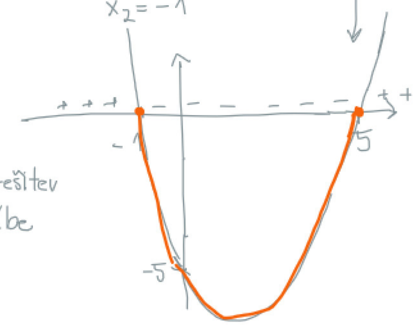
$x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$(x-5)(x+1) \leq 0$

Rešimo kot enačbo → $(x-5)(x+1) = 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = -1$




Z grafa vidimo rešitev neenačbe

$x \in [-1, 5]$ ①

② $4 - 2x > 0$

$-2x > -4 \quad /:(-2)$

$x < 2$

$x \in (-\infty, 2)$ ②

③ $x \in [0, \infty)$ ③

Rešitev sistema je PRESEK vseh intervalov:


$x \in [0, 2)$

vsi vsebujejo število 0

zato ker ② ne vsebuje števila 2

7. a) $x - \dfrac{x+10}{x+3} = 2$

$\dfrac{x}{1} - \dfrac{x+10}{x+3} = 2$

ulomka na skupni imenovalec:

$\dfrac{x\cdot(x+3)}{1\cdot(x+3)} - \dfrac{(x+10)}{x+3} = 2 \quad / \cdot (x+3)$

→ celo enačbo pomnožiš s skupnim imenovalcem in se znebiš ulomka

$x\cdot(x+3) - (x+10) = 2\cdot(x+3)$

$x^2 + 3x - x - 10 = 2x + 6$

$x^2 + \cancel{3x} - \cancel{x} - 10 - \cancel{2x} - 6 = 0$

$x^2 - 16 = 0 \qquad a^2 - b^2$

$(x-4)(x+4) = 0 \qquad (a-b)(a+b)$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

8. a) $\dfrac{x-3}{x^2+x-20} \leq 0$ → pod osjo x in na osi x

$f(x)$

↳ racionalne neenačbe rešujemo s pomočjo racionalne funkcije

narišemo $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x-20}$

ničle: $x - 3 = 0$

$x = 3$

poli: $x^2 + x - 20 = 0$

$(x+5)(x-4) = 0$

$x_1 = -5 \quad x_2 = 4$

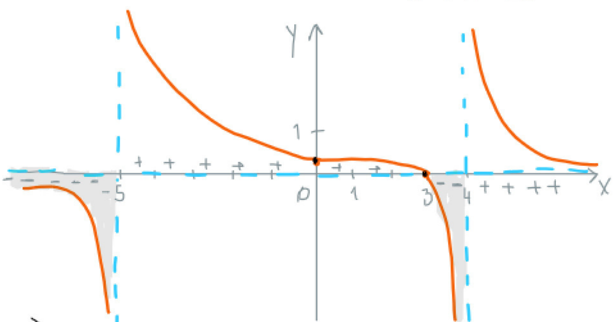
L L

vodoravna asimptota:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

začetna vrednost:

$f(0) = \frac{3}{20}$




Rešitev neenačbe:

$x \in (-\infty, -5) \cup [3, 4)$

9. Poišči rešitve eksponentnih enačb.

(a) $4^x = 16$

(b) $5^{-x} = 125$

(c) $2^{x-1} = 4^5$

(d) $3 \cdot 36^{x-3} = 3$

(e) $9^x = \frac{\sqrt{3}}{27}$

(f) $9^{-3x} = (\frac{1}{27})^{x+3}$

(g) $2^{x^2-7x+12} = 1$ → namig: naloga d)

(h) $4^{x+1} + 4^x = 320$

(i) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

10. Poišči rešitve logaritemskih enačb.

(a) $\log_2 x = 3$

(b) $\log_3(2x+5) = 1$

(c) $\ln(x+1) = 0$

(d) $\log_x 64 = 3$

(e) $\log(x - \frac{8}{9}) = 2\log\frac{1}{6}$

(f) $\log x + \log(x+3) = \log(x-1) + \log(x+2)$

(g) $\ln 2 + 2\ln(x+1) = \ln(2x^2 + 4x + 2)$

(h) $\log(x+4) + \log(x-4) = \log 6x$

Uporabljena pravila:

$a^x = a^y \Rightarrow x = y$

$2^m = 2^3 \rightarrow m = 3$

$a^0 = 1$

$4^0 = 1 \qquad (-83)^0 = 1$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$9^m = (3^2)^m = 3^{2m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Definicija: logaritmand

$a$ = osnova

$\log_a x = y \Rightarrow \boxed{a^y = x}$

$\log_5 (x-2) = 2 \Rightarrow 5^2 = x-2$

Posebni logaritmi:

$\log x = \log_{10} x$ (desetiški logaritem) ne pišemo osnove

$\ln x = \log_e x$ (naravni logaritem)

Pravila za računanje:

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$
3. $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$

9. b) $5^{-x} = 125$ na enako osnovo

$5^{-x} = 5^3$ enačimo samo eksponente

$x = -3$

d) $3 \cdot 36^{x-3} = 3 \quad /:3$

$36^{x-3} = 1 \quad = 36^0$

$36^{\boxed{x-3}} = 36^{\boxed{0}}$

$x - 3 = 0$

$x = 3$

f) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$ $\quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}$

$9^{-3x} = \left(27^{-1}\right)^{x+3}$

$9^{-3x} = 27^{-x-3}$ števili 9 in 27 lahko edino damo na osnovo 3 ; $9 = 3^2$ ; $27 = 3^3$

$\left(3^2\right)^{-3x} = \left(3^3\right)^{-x-3}$

$3^{\boxed{-6x}} = 3^{\boxed{-3x+9}}$

$-6x = -3x + 9$

$-6x + 3x = 9$

$-3x = 9 \quad /:(-3)$

$x = -3$

h) $4^{x+1} + 4^x = 320$

$4^x\left(4^1 + 1\right) = 320$ izpostavimo najmanjšo potenco

$4^x \cdot 4^1 = 4^{x+1}$

$4^x \cdot 1 = 4^x$

$4^x \cdot 5 = 320 \quad /:5$

$4^x = 64$

$4^x = 4^3$

$x = 3$

10. b) $\log_3(\overbrace{2x+5}^{\text{mora biti} > 0}) = 1$

! $\log_a x$ ; pogoj $x > 0$

$3^1 = 2x + 5$

$-2x = 5 - 3$

$-2x = 2$

$x = -1$

preizkusimo rešitev : $\log_3(-2+5) = 1$

$\log_3(\underset{>0}{3}) = 1$ ✓

e) $\log(\overbrace{x - \frac{8}{9}}^{>0}) = 2\log\frac{1}{6}$

$\log\left(x - \frac{8}{9}\right) = \log\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$\log_a x = \log_a y \Rightarrow \boxed{x = y}$

[podobno kot: $a^x = a^y \Rightarrow x = y$]

$x - \frac{8}{9} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$x = \frac{1}{36} + \frac{8}{9}$

$x = \frac{11}{12}$ → preizkus: $\log(\overbrace{\frac{11}{12} - \frac{8}{9}}^{\text{je} > 0})$ ✓

g) $\ln 2 + 2\ln(x+1) = \ln(2x^2+4x+2)$

$$\ln 2 + \ln(x+1)^2 = \ln(2x^2+4x+2)$$

$$\ln(\underbrace{2\cdot(x+1)^2}) = \ln(\underbrace{2x^2+4x+2})$$

$$2\cdot(x+1)^2 = 2x^2+4x+2$$

$$2\cdot(x^2+2x+1) = 2x^2+4x+2$$

$$\cancel{2x^2}+\cancel{4x}+\cancel{2} = \cancel{2x^2}+\cancel{4x}+\cancel{2}$$

$0 = 0 \rightarrow$ Vsak $x \in \mathbb{R}$ reši enačbo.

Več nalog, razlag in formul na **instrukcijeonline.com**