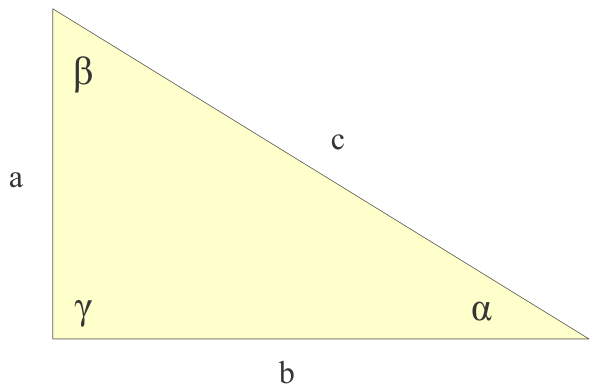
Kotne in krožne funkcije

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \cot\alpha = \frac{b}{a}$

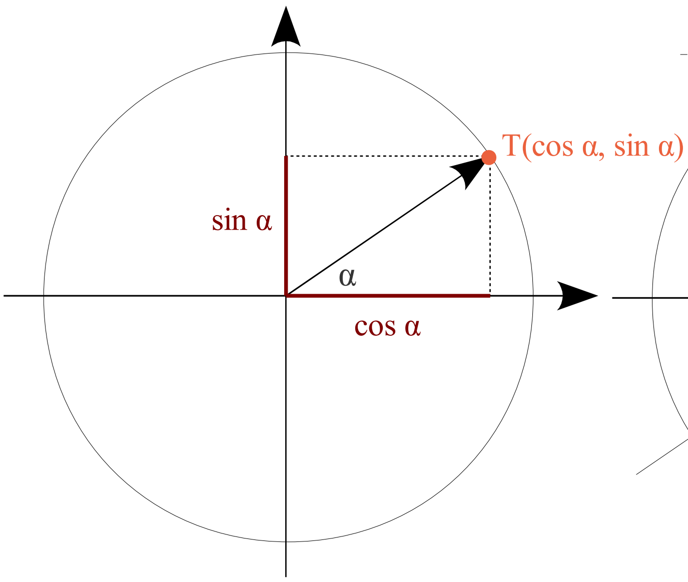
Sinus kota je razmerje kotu **nasprotne katete** in **hipotenuze.**

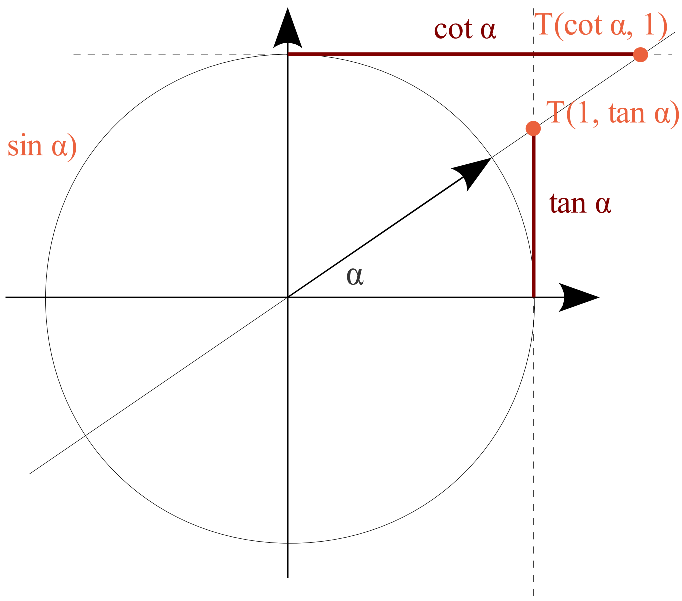
Kosinus kota je razmerje kotu **priležne katete** in **hipotenuze.**

Tangens kota je razmerje kotu **nasprotne katete** in kotu **priležne katete.**

Kosinus kota je razmerje kotu **priležne katete** in kotu **nasprotne katete.**

Kotne funkcije v enotski krožnici





Osnovne zveze in dokazi le-teh

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

2. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \qquad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c \cdot b} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$

4. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b\cdot c}{c\cdot a} = \frac{b}{a} = \cot\alpha$

5. $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad 1+\tan^2\alpha = 1+\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{b^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-1} = (\cos^2\alpha)^{-1}$

6. $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad 1+\cot^2\alpha = 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{a^2}{c^2}\right)^{-1} = (\sin^2\alpha)^{-1}$

Tabela z vrednostmi kotnih funkcij za nekatere kote

α	α	sin α	cos α	tan α	cot α
0°	*0*	0	1	0	/
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	0	/	0
180°	π	0	-1	0	/
270°	$-\pi/2$	-1	0	/	0

Pretvorba med kotnimi funkcijami

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Sodost in lihost kotnih funkcij

Funkcija kosinus je soda, ostale 3 so lihe.

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha \quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

Periodičnost kotnih funkcij

$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha;\ k\in\mathbb{Z} \quad \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha;\ k\in\mathbb{Z}$

$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha;\ k\in\mathbb{Z} \quad \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha;\ k\in\mathbb{Z}$

Razširitev kotnih funkcij za poljuben kot

2. kvadrant

$\sin(\pi-x)=\sin x \quad \cos(\pi-x)=-\cos x \quad \tan(\pi-x)=-\tan x \quad \cot(\pi-x)=-\cot x$

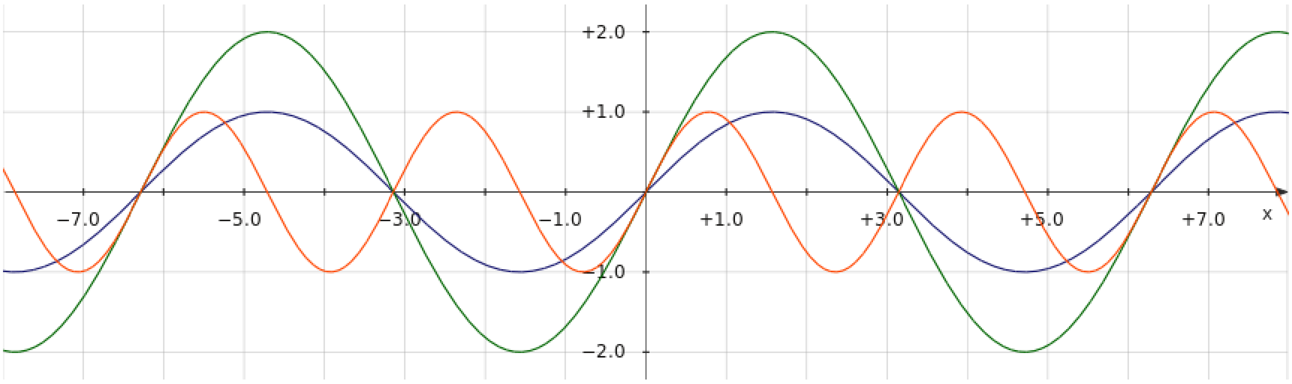
3. kvadrant

$\sin(\pi+x)=-\sin x \quad \cos(\pi+x)=-\cos x$

4. kvadrant

$\sin(2\pi-x)=-\sin x \quad \cos(2\pi-x)=\cos x$

Sinus



Modra: sin(x) Oranžna: sin(2x) Zelena: 2 sin(x)

Lastnosti

Funkcija sinus je **liha funkcija.**

Funkcija sinus je **zvezna funkcija.**

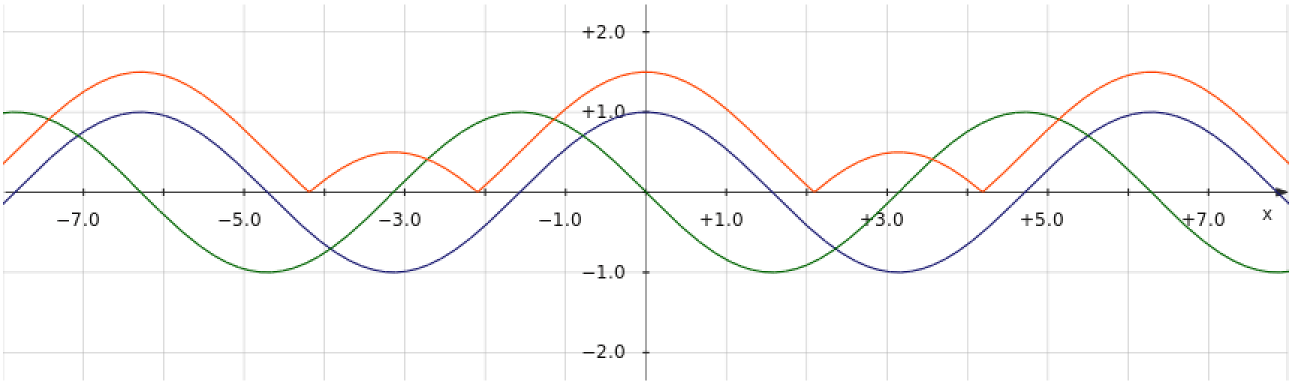
Ničle: $k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Maksimumi: $\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Minimumi: $-\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R} \quad Z_f = [-1,1]$

Kosinus



Modra: cos(x) Oranžna: |sin(x)+0,5| Zelena: cos(x+π/2)

Lastnosti

Funkcija kosinus je **soda funkcija.**

Funkcija kosinus je **zvezna funkcija.**

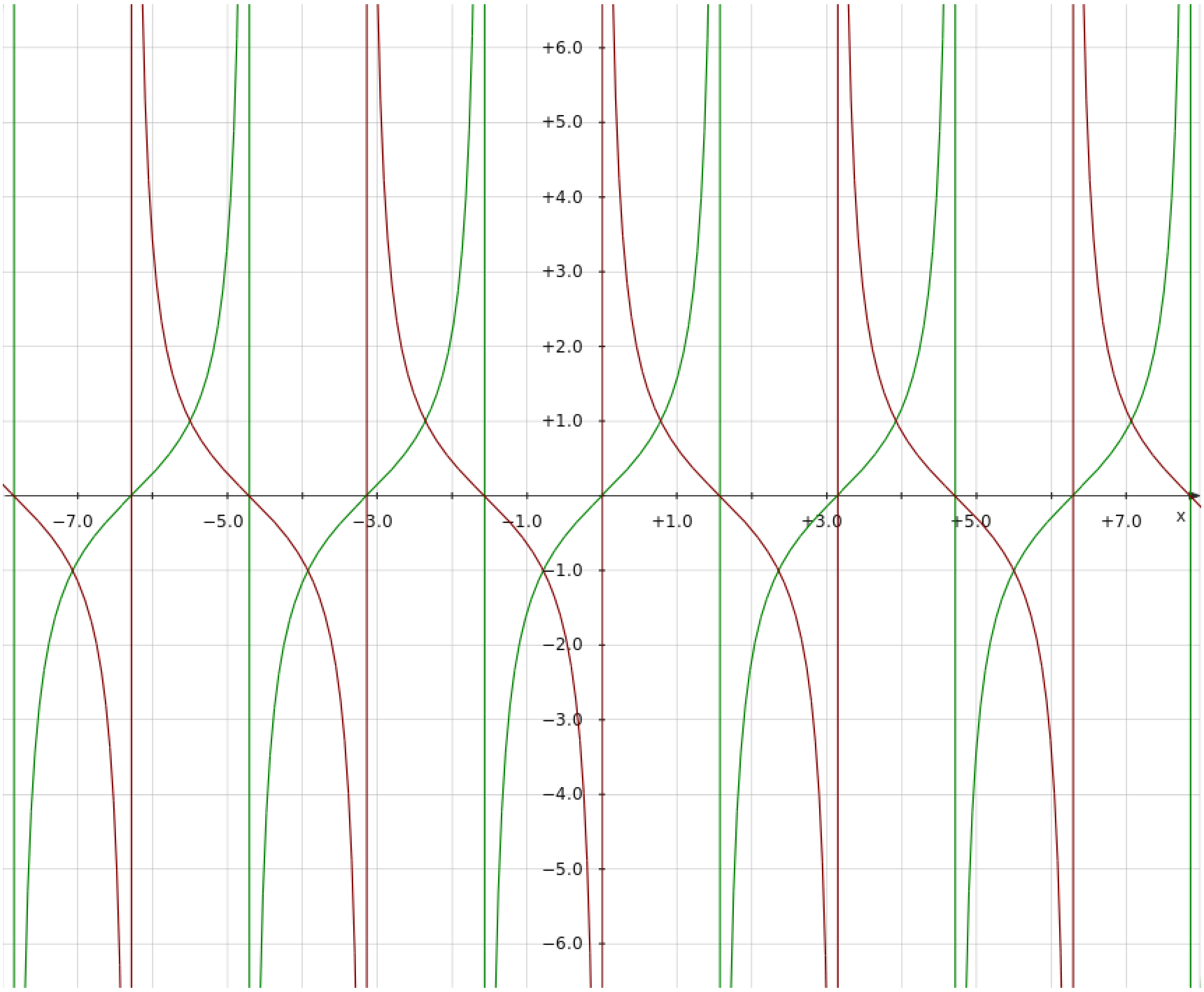
Ničle: $\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Maksimumi: $2\mathrm{k}\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Minimumi: $\pi + 2\mathrm{k}\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R} \quad Z_f = [-1,1]$

Tangens in kotangens



Zelena: tan(x) Rdeča: cot(x)

Lastnosti tangensa

Funkcija tangens je **liha funkcija.**

Funkcija tangens **ni zvezna funkcija.**

Ničle: $k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Maksimumi in minimumi: funkcija tangens je **navzgor in navzdol neomejena.**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x ; x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad Z_f = \mathbb{R}$$

Lastnosti kotangensa

Funkcija kotangens je **liha funkcija.**

Funkcija kotangens **ni zvezna funkcija.**

Ničle: $\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Maksimumi in minimumi: funkcija kotangens je **navzgor in navzdol neomejena.**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ x ; x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \} \qquad Z_f = \mathbb{R}$$

Adicijski izreki

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ $\quad \cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

Kotne funkcije dvojnih kotov in izpeljava

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \mathbf{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \mathbf{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} = \mathbf{\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

$$\cot 2\alpha = \cot(\alpha + \alpha) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\alpha - 1}{\cot\alpha + \cot\alpha} = \mathbf{\frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}}$$

Kotne funkcije trojnih kotov in izpeljava

$$\begin{aligned}
&\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \\
&= \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha = (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha = \\
&= 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = \\
&= 3\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha = \mathbf{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \\
&= \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \cos\alpha - (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha) \cdot \sin\alpha = \\
&= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \\
&= \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha) \cdot \cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = \mathbf{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}
\end{aligned}$$

Kotne funkcije polovičnih kotov in izpeljava

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \qquad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\mathbf{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}} \qquad \mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}}$$

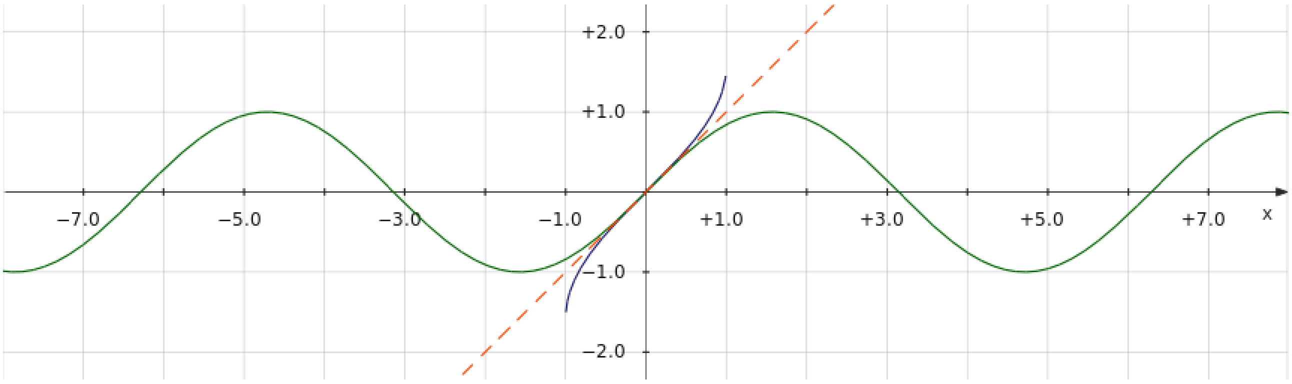
Faktorizacija kotnih funkcij

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \qquad \cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Arkus sinus



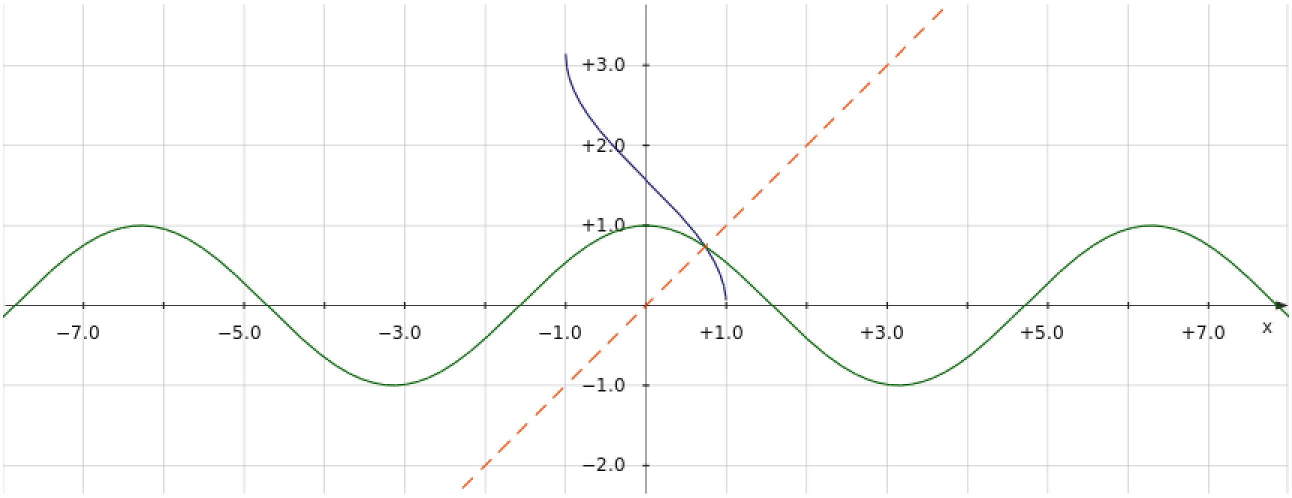
Lastnosti

Graf funkcije **arkus sinus** dobimo tako, da preslikamo graf funkcije **sinus na intervalu [-π/2, π/2]** čez simetralo lihih kvadrantov.

Funkcija arkus sinus je **liha funkcija.**

$D_f=[-1,1] \quad Z_f=\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$

Arkus kosinus



Lastnosti

Graf funkcije **arkus kosinus** dobimo tako, da preslikamo graf funkcije **kosinus na intervalu [0, π]** čez simetralo lihih kvadrantov.

$D_f=[-1,1] \quad Z_f=[0,\pi]$

Arkus tangens

Lastnosti

Graf funkcije **arkus tangens** dobimo tako, da preslikamo graf funkcije **tangens na intervalu (-π/2, π/2)** čez simetralo lihih kvadrantov.

Funkcija arkus tangens je **liha funkcija.**

$D_f=\mathbb{R} \quad Z_f=\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$

Reševanje trigonometričnih enačb

1. Ali lahko povsod kot parameter dobim isti kot?

Za ta namen lahko uporabimo formulo za dvojne ali trojne kote.

2. Ali lahko dobim isto kotno funkcijo?

Za ta namen lahko uporabimo spodnji formuli, ki smo ju izpeljali iz osnovne zveze:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

3. Uporabimo substitucijo

Za lažjo predstavitev enačbe lahko zamenjamo posamezne dele z novo spremenljivko, kot na primer:

$2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 3 = 2A^2 + 3A + 3$

4. Razcepljanje na produkt

$$A \cdot B = 0$$
$$A = 0 \vee B = 0$$

Produkt lahko dobimo z izpostavljanjem ali s formulo za faktorizacijo kotnih funkcij.

5. Zamenjava celih števil

Cela števila v enačbi ki bi nam utegnila biti v napoto pri faktorizaciji, lahko zamenjamo:

$C = C \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

6. Deljenje homogenih enačb

V primeru enačbe, sestavljene iz členov z enakim številom faktorjev, jo delimo s $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

$$2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \qquad /:\cos^2\alpha$$
$$2\tan^2\alpha - 3\tan\alpha - 3 = 0 \qquad /A = \tan\alpha$$
$$2A^2 + 3A + 3$$

7. Reševanje z metodo polovičnih kotov

Ta tip reševanja enačb lahko uporabimo le za enačbe oblike $A\sin\alpha + B\cos\alpha = C$.

Na začetku moramo narediti nekaj zamenjav:

$$A\cdot\sin\alpha = 2\cdot A\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \qquad B\cdot\cos\alpha = B\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \qquad C = C\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

Naprej uporabimo metodo pod točko 6.