Limita in zveznost

1. Izračunaj.
   (a) $\lim_{x\to 2} x^3$
   (b) $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+5)$
   (c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x-1}$

2. Najprej izraz razstavi, nato izračunaj
   (a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$
   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x^3-5x^2+2x}$
   (c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}$
   (d) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{-4x^2+5x-1}$
   (e) $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^3}{x^2-x-6}$

3. Izračunaj, pomagaj si z razliko kvadratov.
   (a) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$
   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
   (d) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{3x}-3}$
   (e) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{x-1}-2}$
   (f) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3}}$

4. Izračunaj.
   (a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{2x^2+1}$
   (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x^2+2}$
   (c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x}$
   (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{3-x}{x}$
   (e) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}$
   (f) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{3x^3-5x}$

5. S pomočjo znanih formul izračunaj naslednje limite.
   (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$
   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$
   (c) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$
   (d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x}$
   (e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}$

POSTOPEK:
1) vstavimo x in če dobimo nedefiniran ulomek
↓
2) razstavimo števec in imenovalec ter okrajšamo ulomek
3) ponovno vstavimo x = 0 in dobimo rešitev

2. b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x^3-5x^2+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+4)}{x(x^2-5x+2)} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{0}{0}$ ni definirano

$x^2+4x = x(x+4)$
$x^3-5x^2+2x = x(x^2-5x+2)$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{-4x^2+5x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)(x-1)}{-(4x-1)(x-1)} = \frac{2\cdot 1-1}{-(4\cdot 1-1)} = -\frac{1}{3}$

$\frac{0}{0}$ ni definirano

$2x^2-3x+1 = (2x-1)(x-1)$
$-4x^2+5x-1 = -(4x^2-5x+1) = -(4x-1)(x-1)$

} razstavimo lahko tudi s pomočjo diskriminante

POSTOPEK
1) vstavimo x in če dobimo nedefiniran ulomek
↓
2) kjer nastopa vsota/razlika členov, pomnožimo z nasprotno operacijo

RAZLIKA KVADRATOV: $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$ ali $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

! če pomnožimo števec, moramo imenovalec tudi z enakim izrazom (in obratno)

3) vpeljemo in ponovno vstavimo x

3. b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)} =$

a b

$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{1+2x-1} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{2x} = \frac{1+1}{2} = 1$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{3x}-3}$ (a, b)

$\frac{0}{0}$ ni definirano

pomnožiš

$= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{3x}+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)(\sqrt{x+1}+2)} =$

pomnožiš

$= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)(\sqrt{3x}+3)}{(3x-9)(\sqrt{x+1}+2)}$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$
$(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3) = \sqrt{3x}^2-3^2 = 3x-9$

$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\sqrt{x}^2 = x$!

f) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3})}{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3})(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3})} =$

$\frac{0}{0}$ ni definirano

$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3})}{(4x+1)-(3x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3})}{x-2} = 6$

Limite v neskončnosti

4. a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{2x^2+1} /:x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

($\frac{2x}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$)

največja potenca je x^2

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^2+2} /:x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$

($\frac{x}{x^2} \to 0$, $\frac{4}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x^2} \to 0$)

največja potenca je x^2

če je stopnja polinoma v imenovalcu višja, vemo da bo rezultat enak 0!

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x} = \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$ ali ni definirano

($\frac{2x}{x^2} \to 0$, $\frac{3}{x^2} \to 0$, $\frac{x}{x^2} \to 0$)

če je stopnja polinoma v imenovalcu nižja, bo rezultat ∞!

POSTOPEK:

1) poiščemo najvišjo potenco v ulomku
2) vse člene delimo s to potenco
3) okrajšamo ulomke; upoštevamo

! $\frac{1}{x^n} \to 0$

oziroma

! $\frac{x^n}{x^m} \to 0$, ko je $n<m$

} ko $x \to \infty$

ZNANE LIMITE:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

5. b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \,/\cdot\cos x}{\sin^3 x \,/\cdot\cos x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x\cdot\cos x}{\sin^3 x\cdot\cos x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cdot\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x\cdot\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$

$= \frac{1}{2\cdot 1^2\cdot 1} = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

$\Downarrow$

$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin^2 x = 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \,/^2$

$\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \,/\cdot 2$

$1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(2x+2)+1}{2x+2}\right)^{x+1}$

$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x+2}\right)^{(x+1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}$ (pomnoži)

$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x+2}\right)^{(2x+2)\cdot\frac{1}{2}}$ (mora biti enako)

$= e^{\frac{1}{2}}$

$a^{x\cdot y} = (a^x)^y$

$\lim\left(1+\frac{1}{2x+2}\right)^{2x+2} = e$

POSTOPEK

1) razčlenimo ulomek na $1+\frac{1}{\square}$

2) uredimo oz. pomnožimo tako, da bo izraz v eksponentu vseboval faktor, ki je enak imenovalcu

$\lim_{a\to 0}\left(1+\frac{1}{a}\right)^a = e$

$\lim_{a\to\infty}\left(1+a\right)^{\frac{1}{a}} = e$

Zveznost funkcije

6. Preuči zveznost naslednjih funkcij.

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x<-1 \\ 2^x & ; \ x\geq -1 \end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x<-1 \\ 0 & ; \ x=-1 \\ 2^x & ; \ x>-1 \end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} -x & ; \ x<0 \\ x^2-1 & ; \ x\geq 0 \end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x<0 \\ x^2+1 & ; \ x=0 \\ |x-1| & ; \ x>0 \end{cases}$

7. Dokaži zeznost funkcije

$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\leq 0 \\ e^x-1 & ; \ x>0 \end{cases}$

8. Določi točke nezveznosti

$f(x)=\begin{cases} e^x & ; \ x\leq 0 \\ x-1 & ; \ 0<x\leq 1 \\ \ln x & ; \ x>1 \end{cases}$

6. a)

I. $x<-1$: $f(-1) = (-1)^2 = 1$

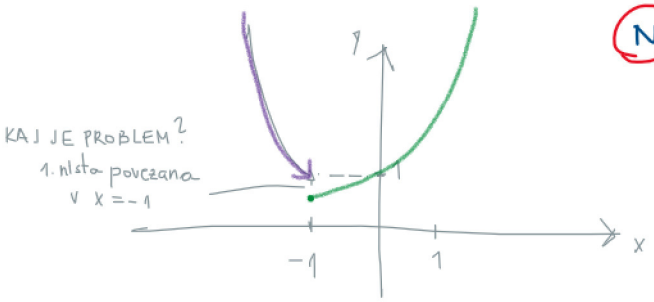
II. $x\geq -1$: $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\neq$ } morali bi dobiti enako vrednost

NI ZVEZNA

x^2 je zvezna f. za $x\in\mathbb{R}$

2^x je zvezna f. za $x\in\mathbb{R}$ ✓



KAJ JE PROBLEM?
1. ničla povezana v $x=-1$

d)

I. $x < 0$: $f(0) = 1$

II. $x = 0$: $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

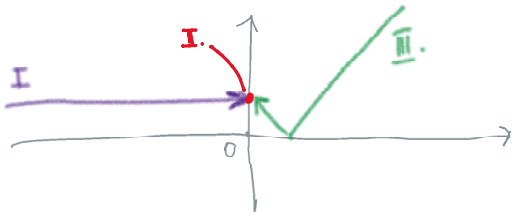
III. $x > 0$: $f(0) = |0 - 1| = |-1| = 1$

} se ujemajo

JE ZVEZNA

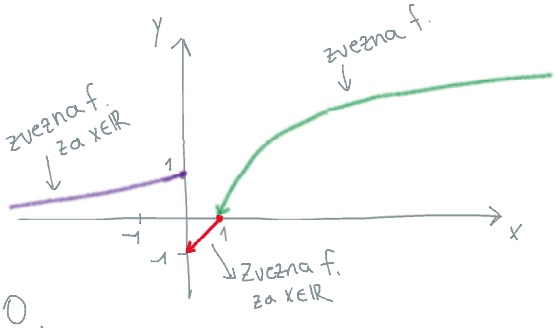
$x^2 + 1$ je zvezna za $x \in \mathbb{R}$

$|x - 1|$ je zvezna za $x \in \mathbb{R}$ ✓



8. Določi točke nezveznosti

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \ x \leq 0 \\ x - 1 & ; \ 0 < x \leq 1 \\ \ln x & ; \ x > 1 \end{cases}$$



I. $f(0) = e^0 = 1$ II. $f(0) = -1$ III. $f(1) = 0$

V $x = 0$ NI zvezna

$f(1) = 0$

V $x = 1$ JE zvezna

Točke nezveznosti : $x = 0$