Matematična indukcija: zbirka nalog + rešeni primeri

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n veljajo naslednje trditve.
   (a) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
   (b) $1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n=(2n-2)\cdot2^n+2$
   (c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$
   (d) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
   (e) $2|\ 3^{n+1}-1$
   (f) $4|\ 3^{n+1}-2n^2+13$
   (g) $8|\ 3^{2n+2}-8n-9$
   (h) $6|\ n(n^2-1)$
   (i) $6|\ 3^{n^2}+9n+6$
2. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva z 9.
3. Dokaži, da je produkt poljubnih treh zaporednih naravnih števil deljiv s 6.
4. Ali velja, da je število $(3^n+2\cdot5^{n+1}+1)$ deljivo s 6 za vsako naravno število n.

POSTOPEK:
1. preverimo trditev za $n=1$
2. predpostavimo, da trditev velja za n
3. dokazujemo, da velja za $n+1$

Če velja za $n+1$, trditev velja za vsako naravno število n.

1. a, b, c, d

V SPLOŠNEM:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

$$S_{n+1}=a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}$$

Matematična indukcija - rešeni primeri

1. b)

$$\boxed{\underbrace{1\cdot2^1}_{a_1\ (1.\text{ člen})}+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+\underbrace{n\cdot2^n}_{a_n\ (n\text{-ti člen})}=\underbrace{(2n-2)\cdot2^n+2}_{S_n\ (\text{vsota za } n \text{ členov})}}$$

I. $n=1$:

$$\underbrace{1\cdot2^1}_{a_1}=\underbrace{(2\cdot1-2)\cdot2^1+2}_{S_1}$$

$$2=0\cdot2+2$$

$$2=2\ \checkmark$$

$$a_n=n\cdot2^n$$

$$a_{n+1}=(n+1)\cdot2^{n+1}$$

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=(2n-2)\cdot2^n+2$$

namesto 'n' pišemo 'n+1'

$$S_{n+1}=\underbrace{a_1+a_2+\ldots+a_n}_{S_n}+\underbrace{a_{n+1}}_{\text{en člen dodamo}}=(2(n+1)-2)\cdot2^{n+1}+2$$

II. $n\to n+1$:

- predpostavimo, da velja $T(n)$: $1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n=(2n-2)\cdot2^n+2$
- dokazujemo, da velja $T(n+1)$: $\underbrace{1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n}_{S_n\ =\ (2n-2)\cdot2^n+2}+\underbrace{(n+1)\cdot2^{n+1}}_{a_{n+1}}=\underbrace{(2\cdot(n+1)-2)\cdot2^{n+1}+2}_{S_{n+1}}$

$$S_n+a_{n+1}=S_{n+1}$$

$$(2n-2)\cdot2^n+2+(n+1)\cdot2^{n+1}=(2\cdot(n+1)-2)\cdot2^{n+1}+2$$

$$\underbrace{2n\cdot2^n}_{n\cdot2^{n+1}}\underbrace{-2\cdot2^n}_{-2^{n+1}}\cancel{+2}+n\cdot2^{n+1}\cancel{+2^{n+1}}=(2n+\cancel{2}-\cancel{2})\cdot2^{n+1}\cancel{+2}$$

$$n\cdot2^{n+1}+n\cdot2^{n+1}=2n\cdot2^{n+1}$$

$$2n\cdot2^{n+1}=2n\cdot2^{n+1}$$

$$L=D\ \checkmark$$

Trditev velja za vsako naravno število n.

IDEJA:
- predpostavimo, da enakost velja za prvih n naravnih števil, zato je predpostavka enaka začetni trditvi
- dokazati pa moramo, da bo na podlagi naše predpostavke trditev veljala tudi za '$n+1$' členov
- če to dokažemo, je trditev veljavna za vsako naravno število n

!
$$n\cdot2^{n+1}+n\cdot2^{n+1}=$$
$$=2^{n+1}\cdot(n+n)$$
$$=2^{n+1}\cdot2n$$
$$=2n\cdot2^{n+1}$$

c)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

a_1, a_n, S_n

$a_n=\frac{1}{2^n}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}$

I. $n=1$: $\frac{1}{2}=\frac{2^1-1}{2^1}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ✓ velja za $n=1$

II. $n\to n+1$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$ predpostavimo da velja za n

moramo dokazati:

$S_n+a_{n+1}=S_{n+1}$

L: $S_{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

D: $S_n+a_{n+1}=\underbrace{\frac{2^n-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{skupni imenovalec}}=\frac{(2^n-1)\cdot 2}{2^n\cdot 2}+\frac{1}{2^{n+1}}=\underbrace{\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{združimo}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$

✓

! $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

$2^n\cdot 2^1=2^{n+1}$

Obe strani sta enaki, torej trditev velja za vsak $n\in\mathbb{N}$.

f)

$$4\mid 3^{n+1}-2n^2+13$$

$a\mid b \Rightarrow b=k\cdot a$

b je večkratnik od a

I. $n=1$: $4\mid 3^2-2\cdot 1^2+13$

$4\mid 9-2+13$

$4\mid 20$ $\quad 20=4\cdot k$ ✓

$f(n)=3^{n+1}-2n^2+13$

$f(n+1)=3^{n+2}-2\cdot(n+1)^2+13$

II. $n\to n+1$

$4\mid f(n)=4\mid 3^{n+1}-2n^2+13$ predpostavimo, da velja za n

$\rightsquigarrow$ dokazujemo, ali velja trditev $4\mid f(n+1)$

$4\mid 3^{n+2}-2\cdot(n+1)^2+13$

$3^{n+1}\cdot 3=3^{n+1}\cdot(1+2)=3^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}$

$4\mid 3^{n+1}\cdot 3-2\cdot(n^2+2n+1)+13$

$4\mid 3^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}-2n^2-4n-2+13$

$4\mid \underbrace{2\cdot 3^{n+1}-4n-2}+\underbrace{3^{n+1}-2n^2+13}_{4\cdot k}$

$\Downarrow$

ideja je razčleniti izraz in 'izluščiti' $f(n)$, potem pa preveriti še ostalo.

$$4 \mid 2\cdot 3^{n+1} - 4n - 2 + 4k$$
$$4 \mid \underbrace{2\cdot(3^{n+1}-1)}_{\text{liho - liho = sodo}} - 4n + 4k$$
$$4 \mid 2\cdot 2m - 4n + 4k$$
$$4 \mid 4\cdot(m-n+k)$$
$$4 \mid f(n+1)\ \checkmark$$

pomeni, da trditev velja za vsa naravna števila n.

g)

$$\boxed{8 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9}$$

$f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ namesto n pišemo n+1 $f(n+1) = 3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9$

$= 3^{2n+4} - 8n - 8 - 9$

I. $n = 1$:

$$8 \mid 3^4 - 8 - 9$$
$$8 \mid 81 - 8 - 9$$
$$8 \mid 64 \qquad 64 = 8\cdot k\ \checkmark$$

II. $n \to n+1$

- predpostavimo, da velja za n: $8 \mid f(n)$

$8 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$

- Dokazujemo, da velja za n+1: $8 \mid f(n+1)$

$8 \mid 3^{2n+4} - 8n - 8 - 9$

$$8 \mid 3^{2n+2}\cdot 3^2 - 8n - 8 - 9$$

$3^{2n+2}\cdot 9 = 3^{2n+2} + 3^{2n+2}\cdot 8$ razčlenimo, da dobimo enega posebej

$$8 \mid 3^{2n+2} + 3^{2n+2}\cdot 8 - 8n - 8 - 9$$
$$8 \mid \underbrace{3^{2n+2}\cdot 8 - 8}_{\text{izpostavimo lahko } 8} + \underbrace{3^{2n+2} - 8n - 9}_{8\cdot k}$$

ker smo predpostavili

$$8 \mid 8\cdot\underbrace{(3^{2n+2}-1)}_{l} + 8\cdot k$$
$$8 \mid 8\cdot l + 8\cdot k$$
$$8 \mid 8\cdot(l+k)\ \checkmark$$

ker je izraz res večkratnik števila 8, smo dokazali da trditev velja za vsako naravno število n.

3. Dokaži, da je produkt treh zaporednih naravnih števil deljiv s 6.

Tri zaporedna naravna števila : $n, n+1, n+2$

Ali $6 \mid n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$?

! Čeprav vemo, da je v treh zaporednih naravnih številih najmanj eno sodo ($2\cdot k$) in natanko eno, ki je deljivo s 3 ($3m$), torej bo skupni produkt deljiv s 6, moramo nalogo rešiti z indukcijo

I. $n=1$: $6 \mid 1\cdot 2\cdot 3$

$6 \mid 6$ ✓ 6 je deljivo s 6.

II. $n \to n+1$: $T(n)$: $6 \mid n(n+1)(n+2)$ predpostavimo, da velja

$T(n+1)$ $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3)$ dokazujemo

zmnožimo

$$6 \mid \underbrace{n\cdot(n+1)(n+2)}_{\substack{6\cdot k \\ \text{predpostavka}}} + 3\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

$$6 \mid 3\cdot\underbrace{(n+1)\cdot(n+2)}_{} + 6k$$

mora biti deljivo z 2, kar pa vidimo da je, saj je zmnožek dveh zaporednih naravnih števil vedno sodo število

$6 \mid 3\cdot 2m + 6k$

$6 \mid 6m + 6k$

$6 \mid 6(m+k)$ ✓ Trditev velja za vsako naravno število n.