0.1 Nedoločeni integral

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ odprti interval. Funkcijo F, za katero je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, imenujemo **nedoločeni integral** funkcije f in označimo $F(x) = \int f(x)dx$.

Kot že ime pove, nedoločeni integral ni določen enolično, ampak velja:

Izrek 0.1 *Če je F nedoločeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, je njen nedoločeni integral tudi funkcija G, $G(x) = F(x) + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, in vsak nedoločeni integral funkcije f ima obliko $F(x) + C$.*

Torej je $\int f(x)dx$ določen le do aditivne konstante natančno. Če poznamo neko funkcijo F, da je $F(x) = \int f(x)dx$, smemo zapisati tudi $F(x) = \int f(x)dx + C$.

Primeri:

Iz definicije takoj sledita naslednji lastnosti:

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx$

INTEGRALI ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Tabelo integralov nekaterih elementarnih funkcij dobimo iz tabele odvodov elementarnih funkcij. Torej je:

1. $\int (x^n)' = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
8. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
12. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
13. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

Primer 0.2 *Izračunaj:*

1. $\int 3\sqrt{x}dx$.
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$.
3. $\int \frac{(x^2-1)^3}{3}dx$.
4. $\int \tan^2 x dx$.

INTEGRACIJSKE METODE

Uvedba nove spremenljivke

Izrek 0.3 *Če ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral in je $x(t)$ odvedljiva funkcija, ima nedoločeni integral tudi funkcija $f(x(t)) \cdot x'(t)$, in velja*

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt.$$

Primer 0.4 *Izračunaj* $\int (3+2x)^{42}dx$.

Primer 0.5 *Izračunaj* $\int e^{x^2}xdx$.

Izrek 0.6 *Če je g odvedljiva funkcija, velja*

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = ln|g(x)| + C.$$

Primer 0.7 *Izračunaj:*

1. $\int \tan x dx$.
2. $\int \frac{6x^2+4x+5+1}{2x^3+2x^2+5x+7}dx$.
3. $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2}dx$.

Integracija po delih oz. PER PARTES

To integracijsko metodo dobimo iz formule za odvajanje produkta. Naj bosta $u(x)$ in $v(x)$ odvedljivi funkciji. Odvod produkta je

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Z integriranjem dobimo:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Bistvo integracije po delih je v tem, da integrand spretno zapišemo v obliki $u(x)v'(x)$. Torej v obliki produkta dveh funkcij, od katerih bo potrebno eno odvajati, drugo pa integrirati. Ker načeloma znamo odvajati vsako funkcijo, je potrebno spretno izbrati tisto funkcijo, ki jo bomo integrirali.

Primer 0.8 *Izračunaj* $\int x \ln x dx$.

Primer 0.9 *Izračunaj* $\int x \sin x dx$.

Primer 0.10 *Izračunaj* $\int x^3 e^x dx$.

Primer 0.11 *Izračunaj* $\int e^x \sin x dx$.

Primer 0.12 *Izračunaj* $\int x \ln(1 + x^4) dx$.