ZAPOREDJA IN VRSTE (teorija)

Definicija 1:

Zaporedje $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$ je:

- **NARAŠČAJOČE**, če je $\boldsymbol{a_n \leq a_{n+1}}$ oziroma
- **PADAJOČE**, če je $\boldsymbol{a_n \geq a_{n+1}}$, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.
- **STROGO NARAŠČAJOČE**, če je $\boldsymbol{a_n < a_{n+1}}$ oziroma
- **STROGO PADAJOČE**, če je $\boldsymbol{a_n > a_{n+1}}$, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Definicija 2:

Zaporedje $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$ je **NAVZGOR / NAVZDOL OMEJENO**, če ima zgornjo in spodnjo mejo.

- **ZGORNJA MEJA** je število M, za katerega velja: $\boldsymbol{a_n <}$ **M.**
- **SPODNJA MEJA** je število m, za katerega velja: $\boldsymbol{a_n >}$ **m.**

Zaporedje je **OMEJENO**, kadar je navzgor in navzdol omejeno.

Definicija 3:

Število **a** je **LIMITA** zaporedja $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$, če je izven vsakega odprtega intervala $\boldsymbol{(a - \varepsilon, a + \varepsilon), \varepsilon > 0}$ le končno mnogo členov zaporedja:

$$\boldsymbol{a = \lim_{n \to \infty} a_n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n > n_\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon}$$

Definicija 4:

Zaporedje, ki ima limito, je **KONVERGENTNO**, zaporedje, ki nima limite, pa **DIVERGENTNO**.

Definicija 5:

Število $\boldsymbol{s}$ je **STEKALIŠČE** zaporedja $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}, \dots$, če je v vsakem intervalu $(\boldsymbol{s-\varepsilon, s+\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon > 0}$ neskončno mnogo členov zaporedja.

Trditev:

- Vsako navzgor omejeno naraščajoče zaporedje realnih števil **(a_n)** je konvergentno, njegova limita je **sup(a_n).** (supremum)
- Vsako navzdol omejeno padajoče zaporedje realnih števil **(a_n)** je konvergentno, njegova limita je **inf(a_n)**. (infimum)
- Vsako monotono omejeno zaporedje je konvergentno.

Definicija 6:

Strogo naraščajoča in padajoča zaporedja imenujemo **MONOTONA**.

Trditev 2: Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

Izrek 1: Vsako omejeno zaporedje realnih števil (a_n) ima vsaj eno stekališče.

Definicija 7: Zaporedje (a_n) je **CAUCHYJEVO**, če za

$$(\forall \boldsymbol{\varepsilon > 0})(\exists \boldsymbol{n_\varepsilon} \in \mathbb{N})(\boldsymbol{n, m > n_\varepsilon}) \Rightarrow |\boldsymbol{a_n - a_m}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Izrek 2: Zaporedje $a_n \subseteq \mathbb{R}$ je konvergentno natanko takrat, ko je Cauchyjevo.

Lema 1: Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno.

Trditev 3: (a_n), (b_n) sta konvergentni zaporedji. Potem velja, da je tudi njuna vsota, razlika, produkt ali količnik tudi konvergentno zaporedje.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,\ b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b};\quad b_n, b \neq 0$$

Definicija 8: Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ imenujemo **KONVERGENTNA**, če je konvergentno zaporedje njenih delnih vsot:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

- Če zaporedje delnih vsot ne konvergira, je vrsta **DIVERGENTNA**.

GEOMETRIJSKA VRSTA $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots;\ (a \neq 0)$ je **konvergentna** natanko takrat, ko je $q \in (-1, 1)$ oziroma $|q| < 1$.

- Zaporedje delnih vsot (s_n) je konvergentno, če je Cauchyjevo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon)$$

Trditev 4: **CAUCHYJEV KRITERIJ**:

Vrsta $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ je konvergentna

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon)$.

- Če je vrsta $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n} + \cdots$ konvergentna, potem je $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Definicija 9:

Vrsta $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n} + \cdots$ je **ABSOLUTNO KONVERGENTNA**, če je konvergentna vrsta $|\boldsymbol{a_1}| + |\boldsymbol{a_2}| + \cdots + |\boldsymbol{a_n}| + \cdots$.

Konvergentna vrsta, ki ni absolutno konvergentna, je **POGOJNO KONVERGENTNA**.

Trditev 5: Vrsta $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n} + \cdots$ je absolutno konvergentna $\Leftrightarrow$ $(\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0})(\exists \boldsymbol{n_\varepsilon} \in \mathbb{N})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} > \boldsymbol{n_\varepsilon} \Rightarrow |\boldsymbol{a_{m+1}}| + |\boldsymbol{a_{m+2}}| + \cdots + |\boldsymbol{a_n}| < \boldsymbol{\varepsilon})$.

Trditev 6: Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Definicija 10: [(v_1): $a_1+a_2+\ldots$; (v_2): $b_1+b_2+\ldots$]

- Vrsta (v_2) je **MAJORANTA** za vrsto (v_1), če je $|\boldsymbol{a_n}| < |\boldsymbol{b_n}|\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.
- Tedaj je (v_1) **MINORANTA** za (v_2).

Trditev 7: **PRIMERJALNI KRITERIJ**

Če konvergira vrsta absolutno, potem konvergira absolutno tudi vsaka njena minoranta. Če vrsta divergira, divergira tudi vsaka njena majoranta.

Trditev 8: **KVOCIENTNI ALI D'ALAMBERTOV KRITERIJ**

Predpostavimo, da $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathbf{d}$.

Če je **d < 1**, potem vrsta $\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots}$ konvergira absolutno.

Če je **d > 1**, vrsta $\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots}$ divergira.

Trditev 9: **KORENSKI ALI CAUCHYJEV KRITERIJ**

Predpostavimo, da $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathbf{c}$.

Če je **c < 1**, vrsta $\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots}$ konvergira absolutno.

Če je **c > 1**, potem vrsta $\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots}$ divergira.

Definicija 11:

ALTERNIRAJOČA VRSTA je vrsta, katere členi izmenjujejo predznak:

$\boldsymbol{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots}$ ali $\boldsymbol{-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots}$; $(a_n > 0)$.

Trditev 10: **LEIBNITZOV KRITERIJ**

Če v alternirajoči vrsti $\boldsymbol{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots}$ členi $a_n > 0$ padajo proti 0 ($\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n\ \forall n}$ in $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = 0$), potem je vrsta <u>(pogojno) konvergentna</u>.