Zaporedja

1. Zapiši prvih pet členov zaporedja $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$. Poišči še deseti in stoti člen zaporedja.
2. Zapiši splošni člen zaporedja
   (a) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$
   (b) $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \ldots$
   (c) $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{9}{14}$
   (d) $\frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{11}{14}, \frac{14}{19}$

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$

a_n: splošni člen zaporedja

a_1: 1. člen
a_2: 2. člen
⋮

1. $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$

$a_1 = \frac{2}{3}$ $\quad a_2 = \frac{5}{5} = 1$ $\quad a_3 = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$ $\quad a_4 = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$ $\quad a_5 = \frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}$

$a_{10} = \frac{29}{21} = 1\frac{8}{21}$ $\quad a_{100} = \frac{299}{201} = 1\frac{98}{201}$

$a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3}$

vstavimo $n=1$

2. b) $\underbrace{1 \cdot 1}_{a_1}, \underbrace{2 \cdot 3}_{a_2}, \underbrace{3 \cdot 5}_{a_3}, \underbrace{4 \cdot 7}_{a_4}, \ldots$

$a_1 = 1 \cdot 1$
$a_2 = 2 \cdot 3$
$a_3 = 3 \cdot 5$
$a_4 = 4 \cdot 7$

naravna števila po vrsti (n)

liha naravna števila po vrsti $(2n-1)$

splošni člen: $\boxed{a_n = n \cdot (2n-1)}$

n: 1, 2, 3, 4, ...

$(2n-1)$: ko vstavljamo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ moramo dobiti števila 1, 3, 5, 7, ...

! Pri določanju splošnega člena na podlagi podanih nekaj členov gre za 'PREPOZNAVANJE VZORCA'

c) $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{9}{14}, \ldots$

$a_1 = \frac{3}{5}$ $\quad a_2 = \frac{5}{8}$ $\quad a_3 = \frac{7}{11}$ $\quad a_4 = \frac{9}{14}$

v števcu so liha naravna števila brez 1 $(2n+1)$

$5 = 3 + 2 = 3 \cdot 1 + 2$
$8 = 6 + 2 = 3 \cdot 2 + 2$
$11 = 9 + 2 = 3 \cdot 3 + 2$
$14 = 12 + 2 = 3 \cdot 4 + 2$

v imenovalcu so števila vedno za 2 večja od večkratnikov števila 3

splošni člen: $\boxed{a_n = \frac{2n+1}{3n+2}}$

- Zaporedje strogo narašča, ko:
  $a_{n+1} - a_n > 0$ ali $a_{n+1} > a_n$
  ↳ naslednik je vedno večji od predhodnika, zato je ta razlika med njima v splošnem pozitivna
- Zaporedje strogo pada, ko:
  $a_{n+1} - a_n < 0$ ali $a_{n+1} < a_n$
  ↳ naslednik je manjši od predhodnika, zato je razlika negativna v splošnem

3. Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n}$ strogo padajoče. Kateri členi ležijo na intervalu $[1.2, 1.5]$?

namig: $a_n \geq 1.2$ in $a_n \leq 1.5$

4. Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2^n}{n}$ naraščajoče.

4. $a_n = \frac{2^n}{n}$ Dokazujem, da velja $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ (vsak 'n' smo zamenjali z 'n+1')

$\rightsquigarrow$ vstavimo v neenačbo:

$$\underbrace{\frac{2^{n+1}}{n+1}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{2^n}{n}}_{a_n} \geq 0 \quad / \cdot n\cdot(n+1)$$

vedno pozitivna vrednost, tako da ne vpliva na neenačaj

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$

$$n\cdot 2^{n+1} - (n+1)\cdot 2^n \geq 0$$

$$n\cdot 2^n \cdot 2 - (n+1)\cdot 2^n \geq 0$$

izpostavimo $2^n \rightarrow$ $2^n\cdot(2n - (n+1)) \geq 0$

$$2^n\cdot(2n-n-1) \geq 0$$

$$\underbrace{2^n}_{>0}\cdot\underbrace{(n-1)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ za vsako naravno število}$$

! Zaporedje narašča: $a_{n+1} - a_n \geq 0$

Zaporedje pada: $a_{n+1} - a_n \leq 0$

ni strogo, tako da sta lahko zaporedna člena tudi kdaj enaka

5. Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n^2}{n^2+2}$ omejeno navzdol z $\frac{1}{3}$ in navzgor z 1.
6. Ugotovi, ali je dano zaporedje s splošnim členom omejeno.
   (a) $a_n = \frac{3^n}{5^n}$
   (b) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$
   (c) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$
7. Razišči zaporedje $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2+1}$ $\hookrightarrow$ prvih nekaj členov, omejenost, naraščanje/padanje

Zgornja meja: M

$a_n \leq M$

Spodnja meja: m

$a_n \geq m$

Zaporedje je omejeno, kadar ima zgornjo in spodnjo mejo!

5. $a_n = \frac{n^2}{n^2+2}$ Dokazujem, da: $a_n \geq \frac{1}{3}$ (spodnja meja) in $a_n \leq 1$ (zgornja meja)

$m = \frac{1}{3}$ $M = 1$

$$a_n \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{n^2}{n^2+2} \geq \frac{1}{3} \quad / \cdot 3(n^2+2)$$

$$n^2\cdot 3 \geq 1\cdot(n^2+2)$$

$$3n^2 \geq n^2+2$$

$$3n^2 - n^2 - 2 \geq 0$$

$$2n^2 - 2 \geq 0 \quad /:2$$

$$n^2 - 1 \geq 0$$

$$n^2 \geq 1 \quad \checkmark \text{ kar je res}$$

Dokazali smo: $a_n \geq \frac{1}{3}$

$$a_n \leq 1$$

$$\frac{n^2}{n^2+2} \leq 1 \quad / \cdot (n^2+2)$$

$$n^2 \leq n^2+2$$

$$n^2 - n^2 \leq 2$$

$$0 \leq 2 \quad \checkmark \text{ vedno res}$$

Dokazali smo tudi: $a_n \leq 1$

6. c) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ ugotovi, ali je dano zaporedje omejeno

① izračunamo nekaj začetnih členov, da vidimo kaj se dogaja z zaporedjem:

$$a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$a_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$a_3 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Vidimo že, da je omejeno spodaj z 0, zgoraj pa z 1, ampak moramo dokazati.

$a_4 = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9} \doteq 0,89$

$a_5 = \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16} \doteq 0,94$

$\downarrow$

1 sklepamo, da je zgornja meja 1

Tudi to velja:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

② Svoj sklep tudi dokažemo

$a_n \geq 0$

$\frac{n^2-1}{n^2} \geq 0 \quad / \cdot n^2_{>0}$

$n^2 - 1 \geq 0$

$n^2 \geq 1$ ✓ vedno velja

$a_n \leq 1$ → že tu vidimo, da bo veljalo, saj je števec vedno manjši od imenovalca, in takšen ulomek je vedno manjši od 1

$\frac{n^2-1}{n^2} \leq 1 \quad / \cdot n^2$

$n^2 - 1 \leq n^2$

$0 \leq 1$ vedno velja ✓

Dokazali smo, da je zaporedje a_n navzdol in navzgor omejeno, torej je a_n omejeno zaporedje.

8. Zapiši nekaj členov zaporedja in ugotovi ali je konvergentno ali divergentno. Če obstajajo, poišči limito ali stekališča danega zaporedja.
   (a) $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$
   (b) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
   (c) $a_n = e^{-\frac{1}{n}}$
   (d) $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{n}{n+1}$

9. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom.
   (a) $a_n = \frac{2n+3}{5n-3}$
   (b) $a_n = \frac{n^2-n+3}{2-3n-2n^2}$
   (c) $a_n = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ → glej Limita in zveznost - rešene naloge za postopek

10. Izračunaj limito danega zaporedja s splošnim členom a_n in ugotovi, od katerega člena naprej se vsi nadaljni členi razlikujejo od limite za manj kot ϵ.
   (a) $a_n = \frac{n+2}{2n+5}$ in $\epsilon = \frac{1}{100}$
   (b) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ in $\epsilon = 10^{-8}$

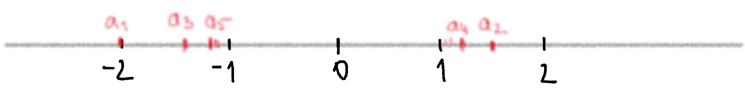
8. $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$

$(-1)^1 = -1 \quad (-1)^2 = 1 \quad (-1)^3 = -1 \quad \ldots$

$a_1 = \frac{-1\cdot(1+1)}{1} = -2 \qquad a_2 = \frac{1\cdot(2+1)}{2} = \frac{3}{2} \qquad a_3 = \frac{-1\cdot(3+1)}{3} = -\frac{4}{3} \qquad a_4 = \frac{1\cdot(4+1)}{4} = \frac{5}{4} \qquad a_5 = \frac{-1\cdot(5+1)}{5} = -\frac{6}{5}$

Zaporedje ima dve stekališči:

-1 in 1



$a_1, a_3, a_5, \ldots$ se približujejo -1

$a_2, a_4, \ldots$ se približujejo 1

ZAPOREDJE a_n JE DIVERGENTNO.

c)

$a_n = e^{-\frac{1}{n}}$

$a_1 = e^{-1} \doteq 0{,}37$ $\quad a_2 = e^{-\frac{1}{2}} \doteq 0{,}6$ $\quad a_3 = e^{-\frac{1}{3}} \doteq 0{,}72$ $\quad \dots$

$a_{100} = e^{-\frac{1}{100}} \doteq 0{,}99 \quad \dots \underset{\text{se približujejo}}{\longrightarrow} 1$ [sklepamo, da je limita enaka 1]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1$ $\quad (\frac{1}{n} \to 0)$

Zaporedje an ima limito.

ZAPOREDJE an JE KONVERGENTNO.

Zaporedje je KONVERGENTNO če ima limito.

Zaporedje z več kot enim stekališčem nima limite, torej je divergentno.

9. b) $\quad a_n = \dfrac{n^2 - n + 3}{2 - 3n - 2n^2}$ $\quad$ izračunaj limito danega zaporedja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 3 \;/ : n^2}{2 - 3n - 2n^2 \;/ : n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} - \frac{2n^2}{n^2}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

upoštevali smo:

$\frac{x^n}{x^m}$; če je $n < m$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0$

npr. $\frac{n}{n^2} \to 0$

! Za razlago tega postopka glej: Limita in zveznost - rešene naloge

10. b) $\quad a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$ $\quad \varepsilon = 10^{-8}$

· izračunaj limito an

· od katerega člena dalje se členi razlikujejo od limite za manj kot ε? $\quad |a_n - L| < \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1 \;/ : n^2}{n^2 \;/ : n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1} = 1 \to \text{LIMITA}$$

$L = 1$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$\left| \frac{n^2+1}{n^2} - 1 \right| < 10^{-8}$

$\left| \frac{n^2+1}{n^2} - \frac{n^2}{n^2} \right| < 10^{-8}$

$\left| \frac{\cancel{n^2} + 1 - \cancel{n^2}}{n^2} \right| < 10^{-8}$

$\frac{1}{n^2}$ je pozitivna zato lahko izpustimo absolutno vrednost

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10^8} \quad / \cdot n^2 \cdot 10^8 > 0$ $\quad$ neenačaj ostane enak, ker smo množili s pozitivno vrednostjo

$10^8 < n^2 \quad / \sqrt{\ }$

$10^4 < n$

$n > 10\,000$

Odg.: Od 10001. člena dalje se členi od limite razlikujejo za manj kot ε.

11. Izračunaj limite

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{2}{n-1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)}_{e}{}^{n\cdot\frac{2}{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n\,/:n}{n-1\,/:n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}} = 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n}{n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}} = e^2$$

Več nalog, razlag in formul na **instrukcijeonline.com**