Številske vrste

Seštevanje števil je osnovna aritmetična operacija, ki jo spoznamo že v naših prvih stikih z matematiko. Takrat se naučimo, kako se sešteje dve števili in pa da vrstni red seštevanja ni važen. Operacijo seštevanja lahko brez težav posplošimo na končno število sumandov, stvari pa se zapletejo, ko poskušamo sešteti neskončno mnogo števil. V tem razdelku bomo videli, kako takšno vsoto sploh definiramo s pomočjo limit zaporedij. Vsota danega zaporedja števil lahko obstaja ali pa ne. Če obstaja, pa je lahko včasih tudi odvisna od vrstnega reda seštevanja.

Definicija 1. *Številska vrsta oziroma vrsta kompleksnih števil je zaporedje kompleksnih števil* (a_n)*, ki ga zapišemo kot formalno vsoto*

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Po definiciji je torej številska vrsta le zaporedje števil, ki bi jih radi sešteli. Ponavadi pa nas zanima predvsem vsota vrste. Radi bi seveda imeli definicijo vsote vrste, ki se bo ujemala z običajnim seštevanjem, kadar bomo imeli opravka z zaporedji, ki imajo samo končno mnogo neničelnih členov.

Najprej definiramo m-to delno vsoto vrste $\sum a_n$

$$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Zaporedju (S_m) rečemo *zaporedje delnih vsot* vrste $\sum a_n$.

Definicija 2. *Številska vrsta* $\sum a_n$ *je konvergentna, če konvergira njej pridruženo zaporedje delnih vsot* (S_m)*. Limiti zaporedja delnih vsot rečemo vsota vrste in jo označimo z*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \lim_{m\to\infty}(S_m).$$

Če vrsta ni konvergentna, je divergentna.

Vsoto neskončno mnogo števil smo definirali v dveh korakih. Najprej za vsako naravno število m izračunamo vsoto prvih m števil v zaporedju. Če nam te končne vsote poljubno dobro aproksimirajo neko kompleksno število, potem to število razglasimo za vsoto vrste. Vidimo, da igra pri tem ključno vlogo pojem limite, ki nam omogoča preiti s končnih vsot na neskončno vsoto. Vsota vrste je pogosto različna od končnih delnih vsot, važno je le, da jo te končne vsote poljubno dobro aproksimirajo.

Zgled. Osnovni primeri številskih vrst so geometrijske vrste. Naj bosta a in $q \neq 1$ kompleksni števili in $a_n = aq^{n-1}$. Pridružena geometrijska vrsta je tedaj

$$\sum a_n = a + aq + aq^2 + \dots$$

Zaporedje delnih vsot

$$S_m = a + aq + \cdots + aq^{m-1} = a(1 + q + \cdots + q^{m-1}) = a\frac{1-q^m}{1-q}$$

konvergira natanko takrat, ko konvergira geometrijsko zaporedje (q^m). Iz razdelka o zaporedjih vemo, da se to zgodi, če in samo če je $|q| < 1$. Od tod sklepamo, da geometrijska vrsta konvergira, če je $|q| < 1$, njena vsota pa je v tem primeru

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \lim_{m\to\infty}(S_m) = \lim_{m\to\infty} a\frac{1-q^m}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

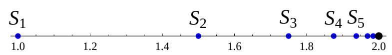
Kot konkreten primer si oglejmo geometrijsko vrsto pri parametrih $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Delne vsote

$$S_m = \frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2^{1-m}$$

se približujejo vsoti vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2,$$

čeprav je v nobenem končnem koraku ne dosežejo. V vsakem koraku pa se razlika med končno delno vsoto in pa vsoto vrste prepolovi.



Direktno iz definicije konvergence vrst in pa iz Cauchyjevega kriterija za konvergenco zaporedij lahko izpeljemo

Trditev 3 (Cauchyjev kriterij za vrste)**.** *Vrsta $\sum a_n$ je konvergentna natanko takrat, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq N$, velja $|a_n + a_{n+1} + \cdots a_m| < \epsilon$.*

Dokaz. Po definiciji je vrsta $\sum a_n$ konvergentna, če in samo če konvergira prirejeno zaporedje delnih vsot (S_m). To pa je po Cauchyjevem kriteriju za zaporedja res natanko takrat, ko je zaporedje (S_m) Cauchyjevo.

Cauchyjev kriterij za zaporedje (S_m) nam pove, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $k, l \geq N$ velja $|S_k - S_l| < \epsilon$. Pri izbiri $k = m$ in $l = n - 1$ dobimo, da velja

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| = |(a_1 + \cdots + a_m) - (a_1 + \cdots + a_{n-1})| = |S_m - S_{n-1}| < \epsilon$$

za vse $m \geq n \geq N + 1$. $\square$

Če vrsta $\sum a_n$ konvergira, so torej vsote dovolj poznih členov poljubno majhne. Pri numeričnem računanju zato vsoto vrste pogosto nadomestimo s končno delno vsoto, če znamo oceniti napako aproksimacije.

Poseben primer Cauchyjevega kriterija je naslednji potrebni pogoj za konvergenco vrst.

Posledica 4. *Če je vrsta $\sum a_n$ konvergentna, je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.*

Dokaz. Predpostavili bomo, da vrsta $\sum a_n$ konvergira in pokazali, da od tod sledi, da zaporedje (a_n) konvergira k 0.

Izberimo $\epsilon > 0$. Po Cauchyjevem kriteriju obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq N$, velja $|a_n + a_{n+1} + \cdots a_m| < \epsilon$. Če izberemo $m = n$, potem za vsak $n \geq N$ velja $|a_n| < \epsilon$ oziroma

$$|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon,$$

kar pomeni, da je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$. □

Vidimo, da potencialno znamo sešteti le zaporedje števil, ki konvergira k 0. Vendar pa mora to zaporedje k 0 konvergirati dovolj hitro. V nadaljevanju razdelka bomo spoznali nekaj kriterijev, s katerimi lahko testiramo hitrost konvergence, še pred tem pa si bomo pogledali osnovni primer zaporedja števil, ki sicer konvergira k 0, a se ne da sešteti.

Zgled (Harmonična vrsta)**.** Harmonična vrsta je vrsta

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Njeni členi sicer konvergirajo k 0, pokazali pa bomo, da vrsta kljub temu ne konvergira.

Za vsak $k \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$c_k = \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Število c_k je sestavljeno iz 2^k sumandov, ki jih lahko navzdol ocenimo z $\frac{1}{2^{k+1}}$. Od tod dobimo oceno

$$c_k > \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Števila c_k ustrezajo vsotam iz Cauchyjevega kriterija pri izbiri $n = 2^k + 1$ in $m = 2^{k+1}$. Od tod sklepamo, da lahko najdemo poljubno velika m in n, da je $\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}\right| > \frac{1}{2}$, kar pa pomeni, da harmonična vrsta ne ustreza Cauchyjevemu kriteriju za $\epsilon = \frac{1}{2}$. Torej je harmonična vrsta divergentna.

Harmonična vrsta je mejni primer družine vrst $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ za $\alpha > 0$. Pokažemo namreč lahko, da vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Pri $\alpha = 1$ dobimo harmonično vrsto, ki sicer divergira, a zelo počasi (približno logaritemsko). Če seštejemo dovolj veliko členov harmonične vrste, lahko dobimo poljubno veliko vsoto, kot dokaz počasne divergence pa navedimo, da je na primer $S_{10^{15}} \approx 35.1$ in $S_{10^{80}} \approx 184.8$.

Definicija 5. *Vrsta $\sum a_n$ je absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta $\sum |a_n|$ absolutnih vrednosti členov.*

Vrsta $\sum a_n$ je pogojno konvergentna, če je konvergentna, pa ni absolutno konvergentna.

Osnovni primeri absolutno konvergentnih vrst so konvergentne vrste s pozitivnimi členi. Pri obravnavi vrst kompleksnih števil pa se lahko zgodi, da členi vrste kažejo v nasprotne smeri in se tako v veliki meri pokrajšajo med sabo. Če namesto členov vzamemo njihove absolutne vrednosti, dosežemo, da vsi členi kažejo v isto smer. Vsota tako dobljenih števil bo po absolutni vrednosti kvečjemu večja od absolutne vrednosti vsote prvotnih števil, zato ni presenetljiv naslednji rezultat.

Trditev 6. *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Denimo, da vrsta $\sum |a_n|$ konvergira. Po Cauchyjevem kriteriju za vsak $\epsilon > 0$ potem obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $m \geq n \geq N$ velja

$$\big||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|\big| < \epsilon.$$

Od tod sklepamo (z uporabo trikotniške neenakosti), da za vse $m \geq n \geq N$ velja

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = \big||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|\big| < \epsilon,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum a_n$ konvergira. □

Množica konvergentnih vrst tako razpade na absolutno konvergentne vrste in na pogojno konvergentne vrste. Vsote absolutno konvergentnih vrst se v praksi obnašajo podobno kot seštevanje števil, medtem ko lahko pri pogojno konvergentnih vrstah naletimo na precej nepričakovane pojave. Nekatere izmed njih bomo omenili v nadaljevanju.

Osnovni računski operaciji, ki jih lahko smiselno definiramo med vrstami, sta seštevanje vrst po členih in pa množenje členov vrste s skalarjem.

Trditev 7. *Naj bosta $\sum a_n$ in $\sum b_n$ konvergentni vrsti ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tedaj je konvergentna tudi vrsta $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ in velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dokaz. Označimo delne vsote vrst $\sum a_n$, $\sum b_n$ in $\sum(\alpha a_n+\beta b_n)$ zaporedoma z (S_m), (T_m) oziroma (R_m). Potem je

$$\begin{aligned} R_m &= (\alpha a_1 + \beta b_1) + \cdots (\alpha a_m + \beta b_m), \\ &= \alpha(a_1 + \cdots + a_m) + \beta(b_1 + \cdots + b_m), \\ &= \alpha S_m + \beta T_m. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\lim_{m\to\infty}(R_m) = \lim_{m\to\infty}(\alpha S_m + \beta T_m) = \alpha \lim_{m\to\infty}(S_m) + \beta \lim_{m\to\infty}(T_m)$$

oziroma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

Na podoben način kot se množi polinome, lahko definiramo tudi produkt dveh vrst. Če je vsaj ena izmed vrst absolutno konvergentna, je konvergenten tudi produkt, njegova vsota pa je enaka kar produktu vsot obeh vrst. Ta lastnost je posplošitev distributivnostnega zakona, ki povezuje množenje in seštevanje števil. V splošnem velja samo za absolutno konvergentne vrste, če pa sta obe vrsti samo pogojno konvergentni, njun produkt ni več nujno konvergenten.

Računanje vsot vrst je v splošnem težak problem. Poleg geometrijske vrste obstaja še nekaj vrst, katerih vsote lahko natančno izračunamo s pomočjo potenčnih vrst, Fourierovih vrst ali pa s kakšno drugo metodo. Praviloma pa se zadovoljimo že z informacijo, ali dana vrsta sploh konvergira. Če poznamo še hitrost konvergence, lahko namesto natančne vrednosti vsote vrste vzamemo kar ustrezen končen približek.

V nadaljevanju bomo spoznali nekaj testov (kriterijev) za preverjanje konvergence vrst.

Trditev 8 (Primerjalni test)**.** *Naj bo $\sum a_n$ poljubna vrsta in naj bo $\sum c_n$ konvergentna vrsta nenegativnih števil. Če velja $|a_n| \leq c_n$ za vse $n \geq n_0$, je vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergentna.*

Dokaz. Pokazali bomo, da vrsta $\sum |a_n|$ ustreza Cauchyjevemu kriteriju. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je vrsta $\sum c_n$ konvergentna, obstaja tak $N \geq n_0$, da za vse $m \geq n \geq N$ velja $|c_n + c_{n+1} + \cdots + c_m| < \epsilon$. Torej je za vse $m \geq n \geq N$

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \leq c_n + c_{n+1} + \cdots + c_m = |c_n + c_{n+1} + \cdots + c_m| < \epsilon,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergira. Pri izpeljavi smo uporabili predpostavko, da za vse $n \geq N \geq n_0$ velja $|a_n| \leq c_n$. □

Vrsta $\sum c_n$ z nenegativnimi členi je *majoranta* vrste $\sum a_n$, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|a_n| \leq c_n$. Če hočemo pokazati, da dana vrsta konvergira, je po primerjalnem testu torej dovolj poiskati kakšno njeno konvergentno majoranto. Ponavadi skušamo dano vrsto primerjati z vrstami, za katere že vemo, da konvergirajo. Ker prvih nekaj členov vrste ne vpliva na njeno konvergenco, je dovolj že poiskati takšno vrsto, ki majorizira dano vrsto od nekod naprej.

S primerjalnim kriterijem lahko dokazujemo tudi divergenco vrst, če ga preberemo v nasprotni smeri. Če je namreč vrsta $\sum a_n$ divergentna in če za vse n od nekod naprej velja $|a_n| \leq c_n$, je tudi vrsta $\sum c_n$ divergentna.

Zgled. Pokazali smo že, da je harmonična vrsta

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergentna. Z uporabo primerjalnega testa od tod sledi, da je tudi vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ za $0 < \alpha < 1$ divergentna. Za $n \geq 1$ namreč velja

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pri $\alpha > 1$ si s primerjalnim testom ne moremo pomagati. Konvergenco vrste $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ za $\alpha > 1$ lahko pokažemo z integralskim testom, ki pa ga ne bomo obravnavali.

Trditev 9 (Korenski test)**.** *Naj bo $\sum a_n$ poljubna vrsta.*

(1) Če obstaja $q \in [0,1)$, da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, je vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergentna.

(2) Naj obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Vrsta $\sum |a_n|$ potem konvergira, če je $L < 1$ in divergira, če je $L > 1$.

Dokaz. (1) Denimo, da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ oziroma $|a_n| \leq q^n$. To pomeni, da je vrsta $\sum a_n$ od n_0 naprej majorizirana z geometrijsko vrsto $\sum q^n$. Za geometrijsko vrsto vemo, da konvergira, če je $q \in [0,1)$, od tod pa po primerjalnem testu sledi, da vrsta $\sum a_n$ konvergira absolutno.

(2) Recimo, da obstaja limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Če je $L < 1$, lahko po definiciji limite zaporedja najdemo tak $q = L + \epsilon$, da je $L < q < 1$ in da za vse člene od nekega $N = n_0$ naprej velja $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$. Po točki (1) torej vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergira.

- V primeru $L > 1$ pa za vse člene od nekega N naprej velja $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ oziroma $|a_n| > 1$. Zaporedje $(|a_n|)$ zato zagotovo ne konvergira k 0, po Posledici **??** pa od tod sledi, da je vrsta $\sum |a_n|$ divergentna.

□

Trditev 10 (Kvocientni test)**.** *Naj bo* $\sum a_n$ *poljubna vrsta.*

(1) Če obstaja $q \in [0,1)$*, da za vse* $n \geq n_0$ *velja* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$*, je vrsta* $\sum a_n$ *absolutno konvergentna.*

(2) Naj obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$*. Vrsta* $\sum |a_n|$ *potem konvergira, če je* $L < 1$ *in divergira, če je* $L > 1$*.*

Dokaz. (1) Končno mnogo členov vrste ne vpliva na njeno konvergenco, zato lahko zaradi enostavnosti predpostavimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ oziroma $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$. Od tod z indukcijo izpeljemo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|a_{n+1}| \leq q|a_n| \leq q^2|a_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n|a_1|.$$

Vrsta $\sum |a_n|$ je torej majorizirana z geometrijsko vrsto $\sum q^{n-1}|a_1|$, za katero pa vemo, da je konvergentna, saj je $q \in [0,1)$. Po primerjalnem testu je vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergentna.

(2) Naj obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

- Če je $L < 1$, lahko najdemo tak q, da je $L < q < 1$ in da za vse člene od nekega naprej velja $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$. Točka (1) sedaj pove, da je vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergentna.
- V primeru $L > 1$ za vse člene od nekega naprej velja $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ oziroma $|a_{n+1}| > |a_n|$. Zaporedje $(|a_n|)$ je torej naraščajoče in zato ne more konvergirati k 0. Po Posledici **??** od tod sledi, da je vrsta $\sum |a_n|$ divergentna.

□

Korenski in kvocientni test uporabljamo večinoma pri dokazovanju konvergence vrst s pozitivnimi členi. Če dana vrsta ustreza enemu izmed teh dveh kriterijev, vemo, da je majorizirana z geometrijsko vrsto, kar pa pomeni, da je konvergenca precej hitra. Četudi ne znamo natančno izračunati vsote takšne vrste, lahko dovolj dobro aproksimacijo dobimo že z relativno majhnimi delnimi vsotami.

Kadar dobimo pri kvocientnem testu limito enako 1, lahko poskusimo z Raabejevim testom, ki ga bomo navedli brez dokaza.

Trditev 11 (Raabejev test)**.** *Naj bo* $\sum a_n$ *poljubna vrsta.*

(1) Če obstaja $q > 1$*, da za vse* $n \geq n_0$ *velja* $n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) \geq q$*, je vrsta* $\sum a_n$ *absolutno konvergentna.*

(2) Naj obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = L$*. Potem vrsta* $\sum |a_n|$ *konvergira, če je* $L > 1$ *in divergira, če je* $L < 1$*.*

Zgled.

(1) $\sum \frac{n!}{n^n}$:

Uporabili bomo kvocientni test:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Ker je $L = \frac{1}{e} < 1$, je vrsta $\sum \frac{n!}{n^n}$ absolutno konvergentna.

(2) $\sum \frac{1}{n5^{n-1}}$:

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja ocena

$$\left|\frac{1}{n5^{n-1}}\right| \leq \frac{1}{5^{n-1}}.$$

Vrsta $\sum \frac{1}{n5^{n-1}}$ ima torej konvergentno majoranto $\sum \frac{1}{5^{n-1}}$, zato je absolutno konvergentna.

(3) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$:

Tokrat bomo spet uporabili kvocientni test:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{1}{4}.$$

Ker je $L = \frac{1}{4} < 1$, vrsta $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ absolutno konvergira.

(4) $\sum e^{-n^2}$:

Pri tej vrsti bomo uporabili korenski test:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}e^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0.$$

Vrsta $\sum e^{-n^2}$ je torej absolutno konvergentna.

Vse vrste v zgornjem zgledu imajo pozitivne člene. Pri takšnih vrstah se absolutna konvergenca ujema s konvergenco, zato pridevnik absolutno ponavadi kar spustimo.

Poleg vrst s pozitivnimi členi se pogosto srečamo tudi z vrstami, katere členi izmenjujejo predznak.

Definicija 12. *Alternirajoča vrsta je vrsta realnih števil oblike* $\sum(-1)^{n-1}a_n$, *kjer je* $a_n \geq 0$ *za vse* $n \in \mathbb{N}$.

Trditev 13 (Leibnizov test)**.** *Naj bo* $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *alternirajoča vrsta, za katero velja:*

· $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$,

· *zaporedje* (a_n) *je padajoče.*

Potem je vrsta $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *konvergentna. Dodatno velja tudi*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n - \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}a_n\right| \leq a_{k+1}.$$

Dokaz. Označimo z

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}a_n$$

m-to delno vsoto alternirajoče vrste $\sum(-1)^{n-1}a_n$. Ker je zaporedje (a_n) padajoče, imamo za vsak $m \in \mathbb{N}$ oceno

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m},$$

kar pomeni, da je (S_{2m}) naraščajoče zaporedje. Po drugi strani pa je

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

Ker je zaporedje (a_n) padajoče, so vsi izrazi v oklepajih nenegativni, zato je

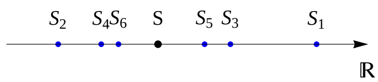
$$S_{2m} \leq a_1$$

za vsak $m \in \mathbb{N}$. Zaporedje (S_{2m}) sodih delnih vsot vrste je torej naraščajoče in navzgor omejeno, zato je konvergentno. Podobno lahko pokažemo, da je zaporedje (S_{2m+1}) lihih delnih vsot navzdol omejeno in padajoče ter zato tudi konvergentno.

Označimo $S = \lim\limits_{m\to\infty}(S_{2m})$. Iz enakosti $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ dobimo

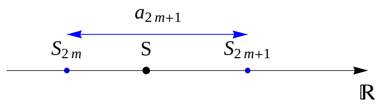
$$\lim_{m\to\infty}(S_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty}(S_{2m}+a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty}(S_{2m}) + \lim_{m\to\infty}(a_{2m+1}) = S+0 = S,$$

kar pomeni, da podzaporedji sodih delnih vsot in pa lihih delnih vsot vrste konvergirata k istemu številu.



Od tod že sledi, da je zaporedje (S_m) konvergentno. Pri izbrani natančnosti lahko namreč najdemo število N_S, da vse sode delne vsote od N_S-te naprej dovolj dobro aproksimirajo S, in pa število N_L, da vse lihe delne vsote od N_L-te naprej dovolj dobro aproksimirajo S. Če izberemo za N večje izmed števil $\{N_S, N_L\}$, bodo vse delne vsote od N-te naprej dovolj dobro aproksimirale S.

Pokažimo sedaj še, da je napaka aproksimacije vsote alternirajoče vrste s k-to delno vsoto po absolutni vrednosti manjša od a_{k+1}. Vzemimo dva zaporedna člena S_k in S_{k+1}. Natanko eden izmed njiju je sod, eden pa lih. Na sliki je prikazan primer, ko je $k = 2m$.



Ker zaporedje sodih delnih vsot narašča proti S, zaporedje lihih delnih vsot pa pada proti S, je limita S na intervalu med obema členoma, torej je

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n - \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}a_n\right| = |S - S_k| \leq |S_{k+1} - S_k| = a_{k+1}.$$

$\square$

Z ugotavljanjem konvergence alternirajočih vrst ponavadi nimamo večjih problemov. Zadošča nam pokazati, da členi po absolutni vrednosti monotono konvergirajo k 0. Če konvergenca ni monotona, pa Leibnizov kriterij ne velja. Obstajajo namreč alternirajoče vrste, ki niso konvergentne, čeprav členi konvergirajo k 0.

Zgled. Poglejmo si vrsto

$$\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Vrsta je alternirajoča, njeni členi pa po absolutni vrednosti monotono padajo proti 0. Po Leibnizovem testu je torej vrsta konvergentna (malo kasneje bomo pokazali, da je njena vsota enaka $\ln 2$).

Vrsta iz absolutnih vrednosti členov dane vrste je harmonična vrsta, kar pomeni, da vrsta $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ni absolutno konvergentna, pač pa le pogojno.

Na koncu razdelka si bomo pogledali še eno izmed lastnosti, pri kateri se absolutno konvergentne vrste precej razlikujejo od pogojno konvergentnih. Vajeni smo, da je seštevanje števil komutativno, kar pomeni, da vrstni red seštevanja ni pomemben. Podobno velja tudi za absolutno konvergentne vrste.

Trditev 14. *Naj bo* $\sum a_n$ *absolutno konvergentna vrsta in* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *poljubna bijekcija. Tedaj je absolutno konvergentna tudi vrsta* $\sum a_{\sigma(n)}$ *in velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dokaz. Označimo

$$\begin{aligned} S_n &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|, \\ S_n^\sigma &= |a_{\sigma(1)}| + |a_{\sigma(2)}| + \cdots + |a_{\sigma(n)}|. \end{aligned}$$

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Vrsta $\sum a_n$ je absolutno konvergentna, zato lahko po Cauchyjevem kriteriju najdemo $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m \geq n \geq N$ velja

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \epsilon.$$

Ker je množica $\{1, 2, \ldots, N\}$ končna, lahko najdemo tak $p \geq N$, da je

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p)\}$$

in zato tudi

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset \{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(p)}\}.$$

Naš cilj bo sedaj pokazati, da sta vsoti S_n in S_n^σ poljubno blizu, če je le n dovolj velik. Za $n \geq p$ velja

$$|S_n - S_n^\sigma| = \left| (|a_1| + \cdots + |a_N| + \cdots + |a_n|) - \left(|a_{\sigma(1)}| + \cdots + |a_{\sigma(n)}|\right) \right|.$$

V množici $\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\}$ so vsebovani vsi členi $\{a_1, \ldots, a_N\}$, zato se na desni strani zgornje enakosti pokrajšajo členi $\{|a_1|, \ldots, |a_N|\}$. V obeh vsotah pa ostanejo le še členi, ki imajo indeks večji od N in manjši od $M = \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Nekateri izmed teh se lahko med sabo še pokrajšajo, vsekakor pa lahko napravimo oceno

$$|S_n - S_n^\sigma| \leq \sum_{i=N+1}^{M} |a_i| < \epsilon.$$

Če torej zaporedje (S_n) konvergira k S, tudi zaporedje (S_n^σ) konvergira k S, kar smo želeli pokazati. □

V primeru pogojno konvergentnih vrst je situacija popolnoma drugačna. Če je namreč $\sum a_n$ pogojno konvergentna vrsta realnih števil in α poljubno realno število, lahko najdemo bijekcijo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha.$$

Spoznali smo že, da je vrsta $\sum(-1)a_n$ pogojno konvergentna. Če člene seštejemo v tem vrstnem redu, dobimo vsoto $\ln 2$. Z ustrezno preureditvijo členov pa lahko dosežemo, da je vsota teh števil 1, 0, π ali pa katerokoli drugo realno število. Vsaka takšna preureditev pa mora nujno zamenjati neskončno število členov. Če namreč prerazporedimo le končno število členov, se vsota vrste ne spremeni.