Rešena matura 8. junij 2019 – IZPITNA POLA 1

1. Rešite naloge, zapisane v levem stolpcu preglednice. Rešitve zapišite v desni stolpec preglednice. Glejte rešeni primer.

Zapišite zalogo vrednosti funkcije s predpisom $f(x)=x^2+3$.	$Z_f=[3,\ \infty)$
Določite najmanjši skupni večkratnik števil 20 in 30.	$v(20, 30)=$ 60
Rešite enačbo $\lvert x\rvert=5$.	$x_1=$ 5 , $x_2=$ −5
Določite razdaljo med točkama $A(-1,\ 1)$ in $B(3,\ 1)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$.	$d(A,\ B)=$ 4
Določite največjo množico D_f, za katero je funkcija s predpisom $f(x)=\sqrt{x-2}$ definirana.	$D_f=$ $[2,\infty)$
Zapišite realni del kompleksnega števila $z=\mathrm{i}^6+\mathrm{i}^7$.	$\mathrm{Re}(z)=$ −1

(8 točk)

$V_{20}=$ 20, 40, 60, 80, …

$V_{30}=$ 30, 60, 90, 120, …

$\lvert x\rvert=5$

1.) $x\geq 0$ 2.) $x<0$

$x=5$ $x=-5$

Po definiciji:

$$\lvert x\rvert=\begin{cases} x\ ;\ x\geq 0 \\ -x\ ;\ x<0 \end{cases}$$

Po definiciji:

$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$A(-1,1)$ $B(3,1)$

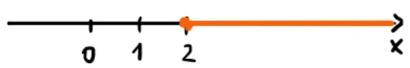
$$d(A,B)=\sqrt{(3-(-1))^2+(1-1)^2}$$ (pazi na predznake)

$$=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

$\boxed{\sqrt{x}\ ;\ \text{pogoj za } D_f:\ x\geq 0}$

$\sqrt{x-2}$; pogoj za D_f: $x-2\geq 0$

$x\geq 2$



$x\in[2,\infty)$

$z = i^6 + i^7 = i^2 + i^3 = -1 - i$

$Im(z) = -1$

imaginarna enota

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$\vdots$ se ponovi

kompleksno število

Če je $z = a + bi$, potem:

$Re(z) = a$, $Im(z) = b$

2. Smučarski skakalec Peter je na treningu v prvih štirih skokih dosegel naslednje daljave: 95 m, 101 m, 93 m in 95 m.

2.1. Izračunajte povprečno dolžino njegovih skokov.

(2)

2.2. Koliko metrov mora skočiti v petem skoku, da bo povprečje povečal na 98 m?

(3)

(5 točk)

2.1. meritve: $x_1 = 95\,m$
$x_2 = 101\,m$
$x_3 = 93\,m$
$x_4 = 95\,m$

Povprečje: $\bar{x} = \dfrac{\overbrace{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}^{\text{vsota meritev}}}{\underbrace{N}_{\text{število meritev}}}$

$$\bar{x} = \frac{95\,m + 101\,m + 93\,m + 95\,m}{4} = \frac{384\,m}{4} = 96\,m$$

2.2. $x_5 = ?$

$\bar{x} = 98\,m$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$98 = \frac{384 + x_5}{5} \quad / \cdot 5$$

$$490 = 384 + x_5$$

$$x_5 = 490 - 384 = 106\,m$$

Odgovor:

V petem skoku mora skočiti 106 m.

instrukcijeonline.com

3. Rešite enačbi:

3.1.

$$2^{x+3} \cdot 2^{x+5} = 32$$

(3)

3.2.

$$2^{x+3} + 2^{x+5} = 5$$

(3)

(6 točk)

3.1.

$$2^{x+3} \cdot 2^{x+5} = 32$$

$$2^{x+3+x+5} = 32$$

$$2^{2x+8} = 2^5$$

$$2x+8 = 5$$

$$2x = 5-8$$

$$2x = -3 \quad /:2$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Množenje potenc z enako osnovo

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Eksponentna enačba oblike:

$$a^x = a^y$$

enačimo eksponente

$$x = y$$

3.2.

$$2^{x+3} + 2^{\boxed{x+5}} = 5$$

Izpostavimo najmanjšo potenco

$$2^{x+3}(1+2^2) = 5$$

ker je $(x+3)+2 = x+5$

$$2^{x+3} \cdot 5 = 5 \quad /:5$$

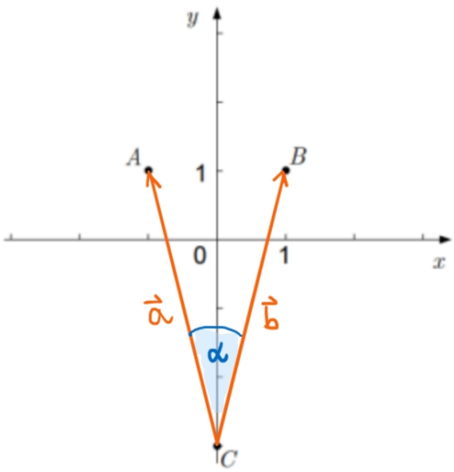
$$2^{x+3} = 1$$

$$2^{x+3} = 2^0$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3$$

4. Na sliki, na kateri so točke $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ 1)$ in $C(0,-3)$, narišite vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ zapišite s koordinatami (komponentami) in izračunajte skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Kot α, ki ga oklepata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, zaokrožite v stopinjah na dve decimalki. Rezultate zapišite v spodnjo preglednico.



Naloga	**Rešitev**
S koordinatami zapisan vektor $\vec{a}$	$\vec{a} =$ -1 , 4)
S koordinatami zapisan vektor $\vec{b}$	$\vec{b} =($ 1 , 4)
Skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 15
Izračunan približek za kot α	$\alpha \doteq$ $28{,}07^\circ$

(8 točk)

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = (-1,1) - (0,-3) = (-1,4)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C = (1,1) - (0,-3) = (1,4)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(-1,4)\cdot(-1,4)} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(1,4)\cdot(1,4)} = \sqrt{1+17} = \sqrt{17}$$

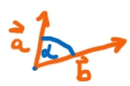
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1,4)\cdot(1,4) = -1 + 16 = 15$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{15}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \frac{15}{17}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{15}{17}\right) = 28{,}07^\circ$$

Skalarni produkt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$



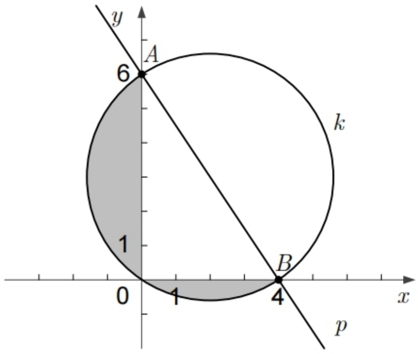
$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Dolžina vektorja:

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(a_1,a_2)\cdot(a_1,a_2)}$

$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

5. Na sliki sta narisani premica p in krožnica k. Premica p poteka skozi točki A in B, premer krožnice k je daljica AB.



5.1. Zapišite enačbo premice p.

(2)

5.2. Zapišite enačbo krožnice k.

(3)

5.3. Izračunajte vsoto ploščin osenčenih odsekov na sliki. Nalogo rešite brez uporabe računala.

(3)

(8 točk)

Točka S je razpolovišče daljice AB : $S = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$

$$= \left(\frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2} \right) = (2, 3)$$

5.1. $y = kx + n$ enačba premice

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ smerni koeficient

$A(\underset{x_1}{0}, \underset{y_1}{6})$ $B(\underset{x_2}{4}, \underset{y_2}{0})$ točki na premici

$$k = \frac{0-6}{4-0} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

n... odsek na y osi : $n = 6$

$y = -\frac{3}{2}x + 6$ ENAČBA PREMICE

instrukcijeonline.com

5.2. $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ enačba krožnice

$r \ldots$ polmer

$S(p,q) \ldots$ središče : $S(2,3)$

Premer : $2r = d(A,B)$

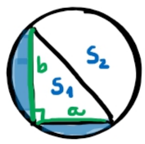
$$= \sqrt{4^2+(-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$r = \sqrt{13}$$

$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ ENAČBA KROŽNICE

5.3. od celotnega kroga odštejemo ploščino neobarvanega dela kroga

Neobarvani del = pravokotni trikotnik + polovica kroga



$$S_1 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 13 = \frac{13\pi}{2} = 6{,}5\pi$$

$$S = \underbrace{S_0}_{\text{celi krog}} - S_1 - S_2 = 13\pi - 12 - 6{,}5\pi = 6{,}5\pi - 12$$

vsota ploščin osenčenih delov

6. V trikotniku ABC stranica AB meri 6 cm. Kot $\alpha = \sphericalangle BAC$ meri 70° in kot $\gamma = \sphericalangle ACB$ meri 30°. Izračunajte dolžino stranice AC in ploščino trikotnika ABC. Rezultata zaokrožite na dve decimalki.

(6 točk)

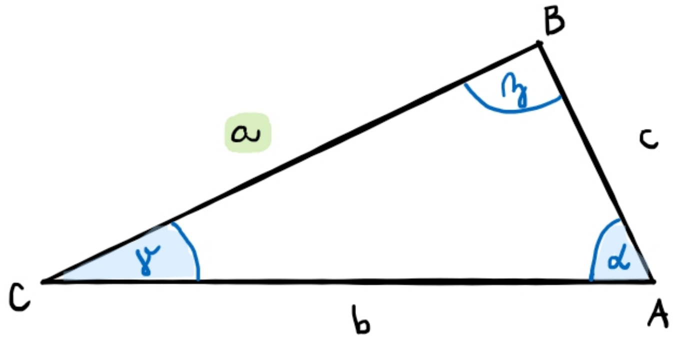
$\alpha = 70°$

$\gamma = 30°$

$c = 6\,cm$

$AC = b = ?$

$S_\Delta = ?$



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\beta = 180° - 70° - 30° = 80°$

Sinusni izrek: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{\sin 80°} = \frac{6}{\sin 30°}$$

$$b \cdot \sin 30° = 6 \cdot \sin 80°$$

$$b = \frac{6 \cdot \sin 80°}{\sin 30°} = 11{,}82\ cm$$

Ploščina trikotnika: $S_\Delta = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$

$$S_\Delta = \frac{b \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{11{,}82 \cdot 6 \cdot \sin 80°}{2} = 33{,}32\ cm^2$$

7. Racionalna funkcija f ima predpis $f(x)=\frac{x-2}{x}$.

7.1. Zapišite enačbi asimptot grafa funkcije f in narišite njen graf.

$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$

pol (navpična asimptota) :

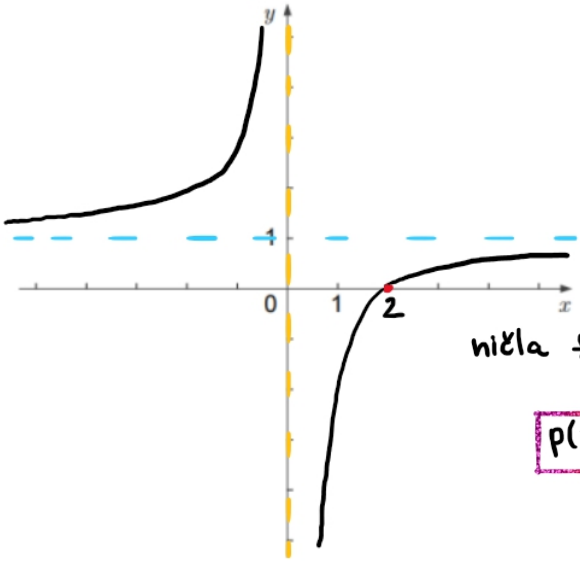
$\boxed{q(x)=0}$

$x=0$

vodoravna asimptota :

$\boxed{y=\frac{a_n}{b_n}}=\frac{1}{1}=1$

vodilna koeficienta



ničla funkcije :

$\boxed{p(x)=0}$ $\quad x-2=0$

$x=2$

(3)

7.2. Izračunajte odvod funkcije f.

(2)

7.3. Izračunajte nedoločeni integral funkcije f.

(3)

(8 točk)

7.2. Odvod ulomka : $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-2}{x}\right)'=\frac{1\cdot x-(x-2)\cdot 1}{x^2}=\frac{x-x+2}{x^2}$$

$(x-2)'=1$

$x'=1$

$f'(x)=\frac{2}{x^2}$ odvod funkcije

7.3.
$$\int f(x)\,dx=\int\frac{x-2}{x}\,dx=\int\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)dx=\int 1\,dx-\int\frac{2}{x}\,dx$$

$\int\frac{2}{x}dx = 2\cdot\int\frac{1}{x}dx$

$$=x-2\cdot\ln|x|+C$$

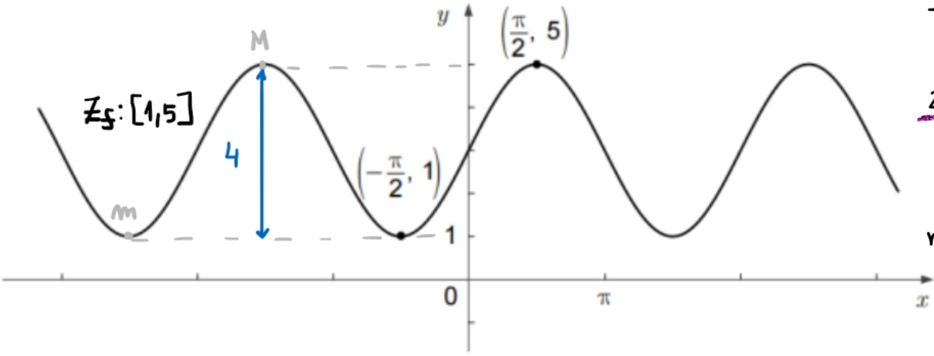
$\int 1\,dx=x+C$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

instrukcijeonline.com

8. Rešite naslednji nalogi:

8.1. Na sliki je del grafa funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=A\sin x+C$, kjer sta $A, C\in\mathbb{R}$. Funkcija f ima lokalni maksimum $M=5$ in lokalni minimum $m=1$. Določite števili A in C.



$f(x)$	Z_f	
$\sin x$	$[-1,1]$	$\cdot 2$
$2\sin x$	$[-2,2]$	$+3$
$2\sin x+3$	$[1,5]$	

$A = 2$ → razteg po y

$C = 3$ → premik po y

(2)

8.2. Dana je funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $g(x)=-2\sin x+1$. Izračunajte vsa presečišča grafa funkcije g in premice z enačbo $y=2$.

(5)
(7 točk)

Presečišče : $y_1 = y_2$

$$-2\sin x + 1 = 2$$
$$-2\sin x = 2-1$$
$$-2\sin x = 1$$
$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Rešitve enačbe

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin x = a \\ &x_1 = \arcsin(a) + 2k\pi \\ &x_2 = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \end{aligned}}$$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi$$
$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi ;\ k\in\mathbb{Z}$$

9. V vreči je 50 listkov, izmed katerih jih 40 prinaša nagrade, preostalih 10 pa ne.

9.1. Iz vreče naključno izvlečemo en listek. Izračunajte verjetnost dogodka A, da izbrani listek prinese nagrado.

(1)

9.2. Iz vreče naključno hkrati izvlečemo dva listka. Izračunajte verjetnost dogodka B, da oba izbrana listka prinašata nagrado.

(3)

9.3. Iz vreče naključno hkrati izvlečemo tri listke. Izračunajte verjetnost dogodka C, da vsaj en izbrani listek prinese nagrado.

(3)
(7 točk)

9.1.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} m\ldots \text{število ustreznih možnosti} \\ n\ldots \text{število vseh izborov brez pogojev} \end{array}}$$

A… izbrani listek prinese nagrado

$$P(A) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \quad \text{ali} \quad P(A) = \frac{\binom{40}{1}}{\binom{50}{1}} = \frac{4}{5}$$

9.2. B… dva izbrana listka prineseta nagrado

$$P(B) = \frac{\binom{40}{2}}{\binom{50}{2}} = \frac{780}{1225} = \frac{156}{245}$$

9.3. C… vsaj en od treh izbranih prinese nagrado

vsaj en: en ali dva ali vsi trije (seštejemo)

$$P(C) = \frac{\binom{40}{1}\binom{10}{2}}{\binom{50}{3}} + \frac{\binom{40}{2}\binom{10}{1}}{\binom{50}{3}} + \frac{\binom{40}{3}}{\binom{50}{3}}$$

$$= \frac{1800 + 7800 + 9880}{19600} = \frac{487}{490}$$

10. Gospa Marija je 12.500 € vložila v banko, ki uporablja obrestno obrestovanje in 1,5% letno obrestno mero. Banka pripiše obresti ob koncu vsakega iztečenega leta varčevanja. Pri nalogi upoštevajte, da banka ne spreminja svojih pogojev in da Marija ne dviga denarja naslednja 4 leta.

10.1. Koliko evrov obresti so Mariji pripisali po prvem letu varčevanja? Zapišite odgovor.

(2)

10.2. Koliko denarja je imela Marija na banki po štirih letih varčevanja? Zapišite odgovor.

(3)

(5 točk)

10.1.

$G_0 = 12500$ €

$p = 1{,}5\,\%$

$n = 1$

$G_1 = ?$

G_0 ... začetni kapital (glavnica)

G_n ... glavnica po n letih

p ... obrestna mera

n ... št. let

o ... obresti

r ... obrestovalni faktor

$$\boxed{\begin{gathered} G_n = G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n \\ G_n = G_0 \cdot r^n \\ r = 1+\frac{p}{100} \end{gathered}}$$

$$G_1 = 12500 \cdot \left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^1$$

$$G_1 = 12687{,}50\ €$$

Obresti: $o = G_1 - G_0 = 12687{,}50 - 12500 = 187{,}50$ €

Odgovor: Pripisali so 187,50 € obresti.

10.2.

$$r = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$$

$$G_4 = G_0 \cdot r^4 = 12500 \cdot 1{,}015^4 = 13267{,}04\ €$$

Odgovor: Po 4 letih je imela 13267,04 €.

11. Zapišite število 2019 kot vsoto dveh realnih števil x in y tako, da bo vrednost izraza $xy-6x-9y+56$ največja.

(6 točk)

$2019 = x + y \qquad x = ? \qquad y = ?$

$xy - 6x - 9y + 56$ največja (MAKSIMUM)

Upoštevamo : $\boxed{y = 2019 - x}$ vstavimo

maksimum funkcije = ekstrem :

$f'(x) = 0$

$f(x) = x\cdot(2019-x) - 6x - 9\cdot(2019-x) + 56$

$= 2019x - x^2 - 6x - 18171 + 9x + 56$

$= -x^2 + 2022x - 18115$

$f'(x) = -2x + 2022 = 0$

$2022 = 2x \quad /:2$

$x = 1011 \longrightarrow y = 2019 - x = 2019 - 1011$

$y = 1008$

Rešitev :

$2019 = 1011 + 1008$

12. Na smučišču Mrzli vrh lahko smučarji kupijo celodnevno vozovnico za odrasle ali celodnevno vozovnico za otroke do 18. leta, ki je za 40 % cenejša od celodnevne vozovnice za odrasle. Predšolskim otrokom lahko starši plačajo celodnevni smučarski tečaj pod vodstvom strokovnih vaditeljev. Cena vozovnice je v tem primeru všteta v ceno tečaja.

Člani družine Novak se odpravijo na celodnevno smučanje na Mrzli vrh. Oče, mama in petnajstletni Maks kupijo celodnevne vozovnice, petletna dvojčka Ana in Tim pa dan preživita z vaditelji na smučarskem tečaju. To družino Novak stane 261 €.

Tudi člani družine Drolc se odpravijo na celodnevno smučanje na Mrzli vrh. Oče, mama, desetletna Maja in trinajstletni Bor kupijo celodnevne vozovnice, štiriletna Julija pa preživi dan z vaditelji na smučarskem tečaju. To družino Drolc stane 197 €.

Kolikšna je cena celodnevne vozovnice za odrasle in kolikšna je cena celodnevnega tečaja za enega otroka?

(6 točk)

x... cena vozovnice za odrasle

$x - 40\% \cdot x = x - 0{,}4x = 0{,}6x$

Vozovnica za otroke do 18. leta: $0{,}6x$

Cena tečaja: y

Družina Novak: $x + x + 0{,}6x + y + y = 261€$

$$\boxed{2{,}6x + 2y = 261€}$$

Družina Drolc: $x + x + 0{,}6x + 0{,}6x + y = 197€$

$$\boxed{3{,}2x + y = 197€} \quad / \cdot (-2)$$

Sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$\left.\begin{aligned} 2{,}6x + 2y &= 261 \\ -6{,}4x - 2y &= -394 \end{aligned}\right\} +$$

$$-3{,}8x + 0 = 133$$

$$x = 35€$$

$y = 197 - 3{,}2x$

$y = 197 - 3{,}2 \cdot 35$

$y = 85€$

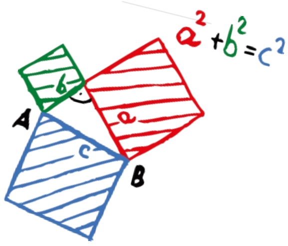
Odgovor: Celodnevna vstopnica za odrasle stane 35€, smučarski tečaj pa 85€.

Prazna matura za samostojno delo:
https://www.ric.si/mma/M191-401-1-1/2019100912543968/

Navodila za ocenjevanje:
https://www.ric.si/mma/M191-401-1-3/2019100912544001/

PONUDBA INŠTRUKCIJ IN BOGATA BAZA GRADIV

(zapiski, formule, rešene naloge) na:
https://instrukcijeonline.com



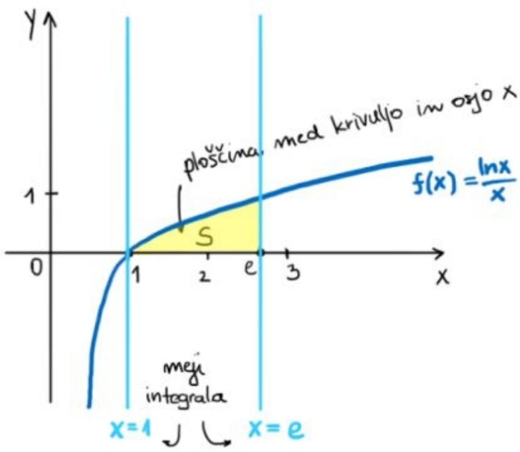
15. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulja $y = x^{-1}\ln x$, os x in premici $x = 1$ in $x = e$.

$$\boxed{y = x^{-1}\ln x = \frac{\ln x}{x}}$$

ničle: $\ln x = 0$
$x = 1$

Definicijsko območje: $x > 0$
$\boxed{\ln x \,;\, x > 0}$ $\quad x \neq 0$

x	y
1	0
2	$\frac{\ln 2}{2}$
$\frac{1}{2}$	$2\ln(\frac{1}{2})$



Ploščina: $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{g(1)}^{g(e)} \frac{t}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

nova spremenljivka
$t = \ln x = g(x)$
$dt = \frac{1}{x}\,dx$
$dx = x \cdot dt$

$g(1) = \ln 1 = 0$
$g(e) = \ln e = 1$