USTNI IZPIT MATEMATIKA

1. Osnove logike

- **Kaj je izjava? Kaj je negacija izjave? Kaj je konjunkcija in kaj disjunkcija izjav? Zapišite pravilnostne tabele za negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo.**

Izjava je vsak povedni stavek. ***Negacija izjave*** A trdi nasprotno kot izjava A. ***Konjunkcija*** izjav A in B nastane tako, da povežemo izjavi z besedo IN. ***Disjunkcija*** izjav A in B nastane s povezavo ali.

A	B	$A \wedge B$
p	p	p
p	n	n
n	p	n
n	n	n

A	B	$A \vee B$
p	p	p
p	n	p
n	p	p
n	n	n

- **Kaj je izjava? Kaj je implikacija in kaj ekvivalenca izjav? Zapišite pravilnostni tabeli za implikacijo in ekvivalenco.**

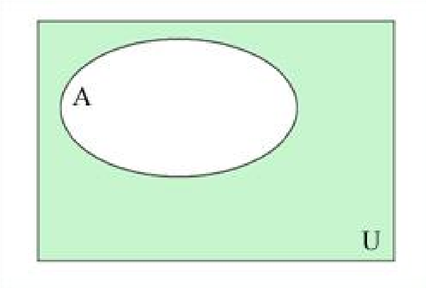
Implikacija izjav A in B je sestavljena izjava, pri kateri je izjava A pogoj ali privzetek, izjava B pa posledica izjave A. ***Ekvivalenca*** izjavi A in B poveže s ″če in samo če″, ″natanko tedaj, ko″.

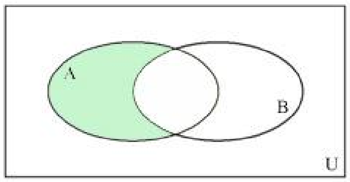
A	B	$A \Rightarrow B$	A	B	$A \Leftrightarrow B$
p	p	P	p	p	p
p	n	n	p	n	n
n	p	p	n	p	n
n	n	P	n	n	p

2. Množice

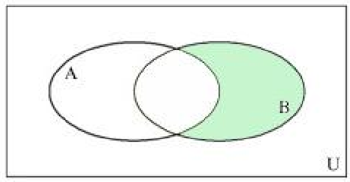
- **Kaj je prazna množica? Kaj je univerzalna množica? Kaj je komplement množice? Kaj je razlika dveh množic?**

Prazna množica je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa. ***Univerzalna množica*** je množica vseh elementov. ***Komplement*** dane množice A je množica, ki vsebuje vse tiste elemente, ki jih množica A ne vsebuje. ***Razlika množic*** A in B je množica sestavljena iz elementov, ki pripadajo množici A in hkrati ne pripadajo množici B.





A \ B



B \ A

- **Kdaj sta dve množici enaki? Kaj je podmnožica dane množice? Kaj je unija in kaj presek množic?**

Množici A in B sta enaki, če vsebujeta iste elemente. To je res, samo če je množica A podmnožica množice B, hkrati pa je tudi množica B podmnožica množice A.

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Pravimo, da je množica A ***podmnožica*** množice B, če je vsak element množice A vsebovan tudi v množici B.

$A \subset B$ (ali tudi $A \subseteq B$).

Unija množic A in B je množica sestavljena iz elementov, ki pripadajo množici A ali množici B (ali obema).

$$A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Presek množic A in B je množica sestavljena iz elementov, ki pripadajo množici A in množici B hkrati.

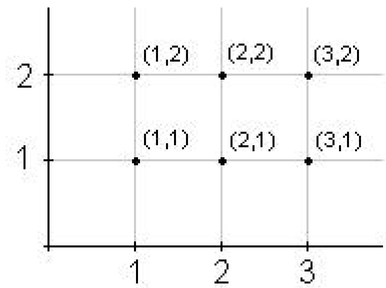
$$A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- **Kaj je kartezični produkt dveh množic? Kaj lahko grafično predstavimo kartezični produkt?**

Kartezični produkt množic A in B je množica sestavljena iz urejenih parov, ki imajo prvo komponento iz množice A in drugo iz množice B.

$$A \times B = \{(a, b); (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

Elemente kartezičnega produkta lahko ponazorimo kot točke.



- **Kaj je potenčna množica dane množice?**

Potenčna množica množice A je množica vseh podmnožic množice A.

$$P\,A = \{X; X \subset A\}$$

Če ima množica A točno n elementov, potem ima 2n podmnožic, torej:

$$m(A) = n \ \Rightarrow m(P, A) = 2^n$$

3. Naravna in cela števila

- **Navedite osnovne računske operacije za računanje v množicah $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{Z}$ ter njihove lastnosti.**

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$	
a + b = b + a	komutativnostni zakon (za seštevanje)	$a + b = b + a$	komutativnostni zakon (za seštevanje)
a + (b + c) = (a + b) + c	asociativnostni zakon (za seštevanje)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	asociativnostni zakon (za seštevanje)
a b = b a	komutativnostni zakon (za množenje)	a (b + c) = a b + a c	distributivnostni zakon (za seštevanje in

			množenje)
a (b c) = (a b) c	asociativnostni zakon (za množenje)	$a + (-a) = 0$	zakon o inverznem elementu (za seštevanje)
a 1 = a	zakon o nevtralnem elementu (za množenje)	$a\,b = b\,a$	komutativnostni zakon (za množenje)
a (b + c) = a b + a c	distributivnostni zakon	$a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$	asociativnostni zakon

- **Definirajte soda in liha števila:**

$Sodo\ število: \{2 \times n; n \in \mathbb{Z}\}$
$Liho\ število: \{2 \times n + 1; n \in \mathbb{Z}\}$

  - Vsota dveh lihih števil je sodo število (dokaz)
  - Kvadrat lihega števila je liho število (dokaz)

- **Definirajte praštevilo in sestavljeno število. Zapišite množico vseh praštevil, manjših od 20.**

Praštevilo je naravno število, ki ima v množici ℕ točno dva delitelja.
Sestavljeno naravno število je število, ki ima v množici ℕ več kot dva delitelja.

$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19;\ x \in \mathbb{N}\}$

- **Definirajte relacijo deljivosti $(a \div b)$ v ℕ in naštejte njene lastnosti.**

Relacija deljivosti je tranzitivna: (a | b) in (b | c) sledi a | c

Če a deli števili b in c, potem deli a tudi vsoto b + c in razliko b – c: (a | b) in (a | c) sledi a | (b + c) in a | (b - c)

- **Definirajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh celih števil. Kako ju lahko izračunamo? Kdaj sta si števili tuji?**

Največji skupni delitelj danih števil je največje naravno število, ki deli obe dani števili (oziroma vsa dana števila). Označimo ga D(a, b).

Najmanjši skupni večkratnik danih števil je najmanjše naravno število, ki je večkratnik obeh (oziroma vseh) danih števil. Označimo ga v(a, b).

Pri iskanju največjega skupnega delitelja in najmanjšega skupnega večkratnika si lahko pomagamo z razcepom danih števil na ***prafaktorje***:

  - ***Največji skupni delitelj*** dobimo tako, da pri vsakem prafaktorju upoštevamo najmanjšo potenco, ki nastopa v razcepu danih števil (upoštevamo tudi možnost, da je najmanjša potenca enaka 0).
  - ***Najmanjši skupni večkratnik*** dobimo tako, da pri vsakem prafaktorju upoštevamo največjo potenco, ki nastopa v razcepu danih števil.

Če je največji skupni delitelj dveh danih števil enak 1, pravimo, da sta števili ***tuji***. V tem primeru nimata nobenega skupnega prafaktorja.

- **Povejte osnovni izrek o deljenju naravnih števil. Kaj lahko poveste o številih a in b, če je ostanek pri deljenju števila a s številom b enak 0.**

Osnovni izrek o deljenju: a = k b + r

Če je ostanek pri deljenju števila a s številom b enak 0, potem je število b delitelj števila a.

- **Navedite kriterije deljivosti z 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.**

2: zadnja števka je deljiva z 2, **3**: seštevek števk je deljiv s 3

4: dvomestni konec je deljiv s 4, **5**: če je zadnja števka 5 ali 0

6: če je deljivo 2,3 , **8**: če je trimestni konec deljiv z 8

9: če je vsota števk deljiva z 9, **10**: če je zadnja števka 0

4. Racionalna števila

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\,d+b\,c}{b\,d}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\,d}{b\,c}$$

- **Kaj je ulomek? Kdaj ulomka predstavljata isto racionalno število? Definirajte računske operacije z ulomki in naštejte njihove lastnosti.**

Ulomek je zapis oblike $\frac{a}{b}$. Sestavljen je iz celega števila a, ki ga imenujemo števec, in iz celega števila b (b ≠ 0), ki ga imenujemo imenovalec, ter iz ulomkove črte.

Racionalna števila so števila, ki jih lahko zapišemo z ulomki. Pri tem ulomka a/b in c/d predstavljata **isto** racionalno število, če velja zveza: a d = b c, torej: a/b = c/d ⇔ a d = b c (krajšanje, razširjevanje)

$\mathbb{R}$	
$a + b = b + a$	komutativnostni zakon (za seštevanje)
$a + (b + c) = (a + b) + c$	asociativnostni zakon (za seštevanje)
$a + 0 = a$	zakon o nevtralnem elementu (za seštevanje)
$a + (-a) = 0$	zakon o inverznem (nasprotnem) elementu (za seštevanje)
$a\,b = b\,a$	komutativnostni zakon (za množenje)
$a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$	asociativnostni zakon (za množenje)
$a\,1 = a$	zakon o nevtralnem elementu (za množenje)
$a\,a^{-1} = 1$ (za $a \neq 0$)	zakon o inverznem (obratnem) elementu (za množenje)
$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$	distributivnostni zakon (za seštevanje in množenje)

- **Kako racionalno število zapišemo v decimalni obliki? Kdaj je ta zapis končen?**

Ulomek preoblikujemo v decimalni zapis z decimalnim deljenjem.

$$\frac{1}{6}=0{,}16666666\ldots=0{,}1\overline{6}$$

Kadar se deljenje ne izide, pa vedno pride do ponavljanja neke skupine decimalk

Vsako racionalno število lahko zapišemo z ***neskončnim periodičnim decimalnim zapisom***.

- **Razložite pojme: razmerje, osnova, delež, relativni delež in odstotek**

Razmerje opisuje odnos med danimi količinami.

Razmerje med delom in celoto imenujemo ***delež.***

Delež izražen v stotinah imenujemo procentni (odstotni) delež ali na kratko procent (oznaka %), delež izražen v tisočinah pa imenujemo promilni delež ali na kratko promil (oznaka ‰).

5. Realna števila

- **Katera realna števila so racionalna in katera iracionalna? Kakšen decimalni zapis imajo prva in kakšen druga?**

Racionalna števila imajo periodičen decimalni zapis, poleg tega pa jih lahko zapišemo tudi z ulomki.

Iracionalna števila imajo neperiodičen decimalni zapis in jih ne moremo zapisati z ulomki.

- **Navedite nekaj primerov iracionalnih števil. Kakšen decimalni zapis imajo iracionalna števila?**

$\sqrt{2}, e, \pi, log2$... Imajo neperiodičen decimalni zapis.

- **Definirajte številsko premico. Kako ponazorimo racionalna in realna števila na številski premici?**

Števila geometrijsko ponazorimo s točkami na ***številski osi***. Naravna in cela števila ponazorimo s posameznimi nepovezanimi točkami.

Racionalna števila pokrivajo številsko os bolj na gosto - med poljubnima dvema racionalnima številoma leži še vsaj eno racionalno število (npr. aritmetična sredina obeh danih števil). Vendar pa tudi racionalna števila ne pokrivajo vseh točk številske osi.

Točke, ki ostanejo nepokrite, ustrezajo ***iracionalnim številom***.

- **Definirajte interval. Naštejte vrste intervalov, zapišite jih in ponazorite na številski premici**

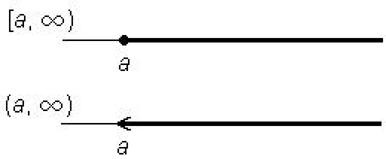
Interval je množica realnih števil, ki ležijo med dvema danima številoma.

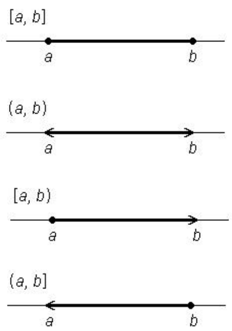
Zaprti interval

Odprti interval

Polodprti interval

Neskončni interval





- **Definirajte absolutno vrednost realnega števila in naštejte njene osnovne lastnosti.**

Absolutna vrednost realnega števila x je razdalja med točko, ki predstavlja število x, in točko, ki predstavlja število 0 na realni osi. Lastnosti:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right| \; ; \; |xy| = |x||y|$$

6. Kompleksna števila

- **Povejte razloge za vpeljavo kompleksnih števil in definirajte množico $\mathbb{C}$.**

V množici realnih števil ne moremo rešiti enačbe: x2 = –1.

Če dopustimo možnost, da rešitev zgornje enačbe vseeno obstaja, ta rešitev nikakor ne more biti niti pozitivna niti negativna niti enaka 0. Odločimo se, da rešitev zgornje enačbe označimo z oznako i. To število imenujmo imaginarna enota. Ker število i ne more biti niti pozitivno niti negativno niti enako 0, vidimo, da i sploh ne more biti realno število.

Množico kompleksnih števil označimo s ℂ. Torej je:

$$\mathbb{C} = \{a + bi;\ a, b \in R\}$$

➢ **Naštejte računske operacije v ℂ in razložite njihove lastnosti.**

Seštevanje: (a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i

Odštevanje: (a + bi) – (c + di) = (a–c) + (b–d)i

Množenje: (a + bi)(c + di) = (ac – bd) + (ad+bc)i

Deljenje: Pri deljenju kompleksnih števil si pomagamo tako, da deljenje zapišemo v obliki ulomka in potem števec in imenovalec pomnožimo s konjugirano vrednostjo imenovalca.

Konjugiranje: Konjugirano vrednost kompleksnega števila a + bi dobimo tako, da spremenimo predznak pri imaginarnem delu.

Konjugirana vrednost števila ***z = a + bi*** je torej število $\bar{z} = a - bi$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$
$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$
$$\overline{z\,w} = \bar{z}\ \bar{w}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$
$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$i^2 = -1\ ;\ i^3 = -i\ ;\ i^4 = 1$$

➢ **Definirajte absolutno vrednost kompleksnega števila in naštejte njene lastnosti.**

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je oddaljenost točke, ki predstavlja to število v kompleksni ravnini, od izhodišča koordinatnega sistema. To je hkrati tudi dolžina krajevnega vektorja, ki ponazarja to število v kompleksni ravnini. Lastnosti:

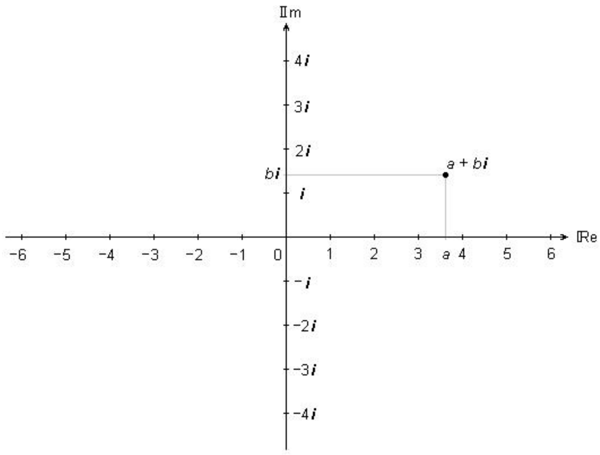
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$$

$$\frac{|z|}{|w|} = \left|\frac{z}{w}\right|\ ;\ |zw| = |z||w|$$

➢ **Definirajte konjugirano kompleksno število in naštejte lastnosti konjugiranja.**

$$\bar{z} = a - bi$$

➢ **Kako upodobimo kompleksna števila v kompleksni ravnini? Ponazorite v kompleksni ravnini osnovne operacije v ℂ: seštevanje, množenje (z -1), množenje s pozitivnim realnim številom, konjugiranje**



7. Algebrski izrazi, enačbe, neenačbe

- **Kaj je rešitev enačbe? kdaj sta te dve enačbi ekvivalentni? Opišite postopke, ki dano enačbo prevedejo v ekvivalentno enačbo**

Rešitev enačbe z eno neznanko je število, pri katerem je vrednost leve strani enačbe enaka kot vrednost desne strani.

Dva matematična izraza sta ***enakovredna,*** če imata pri katerikoli izbiri spremenljivk vedno enako vrednost.

Razčlenjevanje	***Razcepljanje***
a (b + c) = a b + a c	*a* b + *a* c = *a* (b + c)
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
	$a^2 - b^2 = (a+bi)(a-bi)$
	$x^2 + (a+b)x + (ab) = (x+a)(x+b)$

8. Potence in koreni

- **Naštejte in utemeljite pravila za računanje s potencami z naravnimi eksponenti.**

	Enaki osnovi	Enaka eksponenta
Množenje	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Deljenje	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ a \neq 0$	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n,\ b \neq 0$
Potenciranje	$(a^n)^m = a^{nm}$	

- **Definirajte potence z negativnim celim eksponentom in naštejte pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti.**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- **Definirajte n-ti koren. Naštejte pravila za računanje s koreni.**

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$$

- **Definirajte potenco s pozitivno osnovo in racionalnim eksponentom ter povejte pravila za računanje s takimi potencami**

Potence z racionalnimi eksponenti definiramo z:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

9. Geometrija v ravnini in prostoru

- **Kdaj sta premici v prostoru vzporedni? Katere lastnosti ima relacija vzporednih premic v ravnini? Povejte aksiom o vzporednosti.**

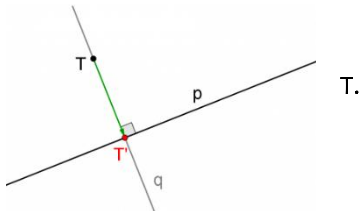
Premici v prostoru sta vzporedni, ko imata enak k.

Premici p in q sta vzporedni, če obe ležita v isti ravnini in nimata nobene skupne točke.

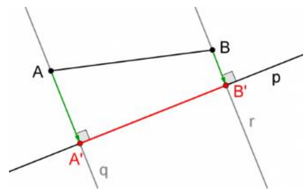
Aksiom: Skozi poljubno točko T poteka točno ena vzporednica k dani premici p.

- **Definirajte pravokotno projekcijo**
    - **Točke na premico**

Pravokotna projekcija točke T na premico p je točka T', ki leži na presečišču premice p in tiste pravokotnice nanjo, ki poteka skozi točko T.



-
    - **Daljice na premico, če daljica in premica ležita v isti ravnini**



Pravokotna projekcija daljice AB na premico p je daljica d', ki leži na premici p, njeni krajišči pa sta pravokotni projekciji krajišč daljice na premico p.

-
    - **Točke na ravnino**

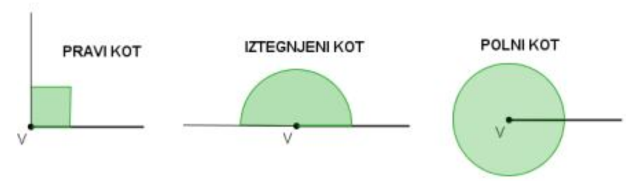
Pravokotna projekcija točke T na ravnino R je točka T', ki leži na presečišču ravnine R in tiste pravokotnice nanjo, ki poteka skozi točko T.

-
    - **Daljica na ravnino**

Pravokotna projekcija daljice AB na ravnino R je daljica d', ki leži na ravnini R, njeni krajišči pa sta pravokotni projekciji krajišč daljice na ravnino R.

- **Število a je pozitivno realno število. Kaj je množica vseh točk v ravnini, ki so**
    - Za a oddaljene od dane točke te ravnine – krožnica?
    - Za a oddaljene od dane premice v tej ravnini – krog?
    - Enako oddaljene od dveh različnih točk te ravnine – elipsa?

- **Definirajte pojem kota in pojasnite izraze: krak, vrh, ničelni, pravi, iztegnjeni polni kot, ostri topi kot. Katere enote za merjenje kotov poznate?**



Krak: eden od dveh poltrakov, ki oblikujeta kot

Vrh: skupno izhodišče krakov

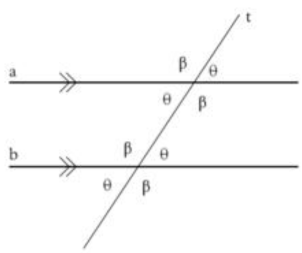
Merske enote za merjenje kotov: stopinje, radiani

- **Definirajte skladnost kotov. Kaj velja za pare kotov z vzporednimi kraki in kaj za pare kotov s pravokotnimi kraki.**

Kota, ki imata oba para krakov vzporedna v isto smer, sta ***skladna.***

Kota s paroma vzporednimi kraki sta lahko skladna. Vsota kotov s paroma vzporednimi kraki je lahko tudi iztegnjeni kot.

Kota s paroma vzporednima krakoma ali s ***paroma pravokotnima krakoma*** sta bodisi enaka bodisi suplementarna.



- **Kaj je trikotnik? Kdaj so lahko tri števila dolžine stranic trikotnika? kakšen je odnos med stranicami in njim nasprotnimi koti?**

Trikotnik je lik s tremi oglišči in tremi stranicami.

V vsakem ravninskem trikotniku velja ***trikotniška neenakost***, ki pravi, da je vsota dolžin katerihkoli dveh stranic večja od dolžine tretje stranice. Torej:

$$a + b > c$$

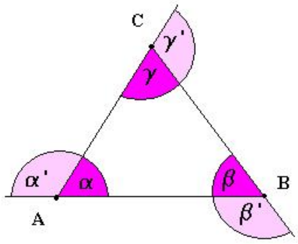
Večji stranici nasproti leži ***večji kot*** in obratno. V pravokotnem trikotniku je hipotenuza najdaljša stranica.

- **Definirajte notranji in zunanji kot trikotnika. Dokažite, da je vsota notranjih kotov trikotnika 180 stopinj, kolikšna je vsota zunanjih kotov trikotnika?**

Notranji koti trikotnika so izbočeni koti z vrhom v oglišču A, B in C. Njihovi sokoti, pa so ***zunanji koti*** trikotnika. Skupaj tvorita iztegnjen kot 180 stopinj.

Vsota zunanjih kotov trikotnika je 360 stopinj.

Zunanji kot trikotnika je enak ***vsoti obeh nasprotnih notranjih (nepriležnih) kotov.***



- **Opredelite pojme v trikotniku: težiščnica, višina, simetrala stranice, simetrala kota, središče včrtanega kroga, središče očrtanega kroga, težišče in višinska točka.**

Težiščnica je oddaljenost oglišča od razpolovišča nasprotne daljice – TEŽIŠČE (presečišče težiščnic)

Višina je oddaljenost oglišča od nosilke nasprotne daljice – VIŠINSKA TOČKA (presečišče višin)

Simetrala daljice je premica, ki je pravokotna na daljico in poteka skozi njeno razpolovišče (jo rapolavlja).

Središče trikotniku očrtanega kroga - kjer se sekajo simetrale stranic.

Središče trikotniku včrtanega kroga - kjer se sekajo simetrale kotov.

- **Opišite konstrukcijo trikotnikov**
  - Očrtanega kroga – narišemo simetrale stranic, presečišče je središče kroga.
  - Včrtanega kroga – narišemo simetrale kotov, presečišče je središče kroga.

- **V pravokotnem trikotniku narišemo višino na hipotenuzo. Koliko podobnih trikotnikov nastane. Odgovor utemelji.**

Višina na hipotenuzo razdeli hipotenuzo na dva dela. To sta pravokotni projekciji katet na hipotenuzo, velja višinski izrek in Evklidova izreka.

- **Kdaj sta dva trikotnika skladna? Povejte izrek o skladnosti trikotnika.**

SKS – trikotnika se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima.

KSK – trikotnika se ujemata v eni stranici in obeh kotih ob njej.

SSS – trikotnika se ujemata v vseh treh stranicah.

sSK – Trikotnika se ujemata v dveh stranicah in kotu, ki leži daljši stranici nasproti.

- **Kdaj sta dva trikotnika podobna? Povejte izrek o podobnih trikotnikih. V kakšnem razmerju sta obsega in ploščini podobnih trikotnikov**

$$O\mathrm{k} = O' \,;\, Pk^2 = P'$$

- **Navedite kosinusni izrek. Kdaj ga uporabljamo? Kaj dobimo, če v pravokotnem trikotniku uporabljamo kosinusni izrek za izračun hipotenuze? Odgovor utemelji.**

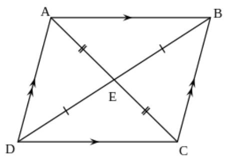
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Če v pravokotnem trikotniku uporabimo kosinusni izrek dobimo Pitagorov izrek, saj je $\cos 90° = 0$.

- **Povejte sinusni izrek, kdaj ga uporabljamo.**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

- **Definirajte paralelogram in opišite njegove lastnosti.**



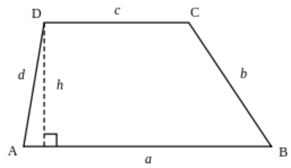
Paralelogram je lik, ki ima obe nasprotni stranici enako dolgi.

$$o = 2a + 2b \,;\, P = av_a$$

Posebni paralelogrami: romb, pravokotnik, kvadrat

- **Definirajte trapez in enakokraki trapez ter napišite njune lastnosti. Kaj je srednjica trapeza? Kako izračunamo ploščino trapeza?**

Trapez je štirikotnik, ki ima dve vzporedni stranici.



V ***enakokrakem trapezu*** sta osnovna kota skladna, dve nasprotni stranici sta vzporedni, drugi pa imata enako dolžino. Diagonali imata enako dolžino.

Srednjica je daljica, ki veže središči nevzporednih stranic b in d, in je vzporedna osnovnicama. Njena dolžina je srednja vrednost osnovnic a in c: $s = \frac{a+c}{2}$

Ploščina trapeza: $P = \frac{(a+c)v}{2}$

- **Kolikšna je vsota notranjih kotov poljubnega n- kotnika? Koliko diagonal ima konveksni n-kotnik? Definirajte pravilni n-kotnik.**

Vsota notranjih kotov n-kotnika: $(n-2) \cdot 180°$

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Pravilni n-kotnik je n-kotnik, ki ima vse stranice skladne in vse notranje kote skladne

- **Definirajte krožnico. Opišite vse medsebojne lege dveh krožnic v ravnini.**

Krožnica je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane točke S.

Medsebojne lege dveh krožnic:

- Nimata skupne točke (nimata skupnega središča ali sta koncentrični)
- Imata eno skupno točko (se dotikata)

- Imata dve skupni točki
- Imata vse skupne točke

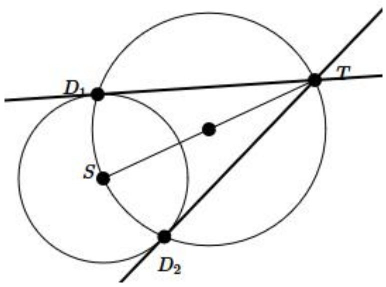
➢ <u>**Opišite vse mogoče medsebojne lege premice in krožnice v ravnini. Za vsako lego poiščite zvezo med polmerom krožnice in razdaljo premice od središča krožnice. Kaj je tangenta na krožnico?**</u>

Medsebojna lega premice in krožnice v ravnini:

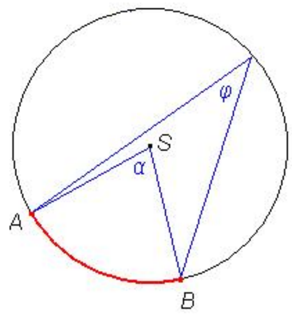
- Mimobežnica – nobene skupne točke
- žTangenta – ena skupna točka
- Sekanta ali tetiva (d = 2r) – dve skupni točki

Tangenta - je premica, ki leži v isti ravnini kot dana krožnica in ima s to krožnico natanko eno skupno točko, je pravokotna na polmer v dotikališču.

➢ <u>**Kako konstruiramo tangento na krožnico v dani točki krožnice?**</u>



➢ <u>**Definirajte središčni in obodni kot v krogu, v kakšni zvezi sta, če ležita nad istim lokom? Navedite Talesov izrek o kotu v polkrogu.**</u>



$\alpha = 2\varphi$

Središčni kot nad lokom AB je kot α, ki ima vrh v središču krožnice, njegova kraka potekata skozi krajišči loka, lok AB pa leži v kotu α.

Obodni kot nad lokom AB je kot φ, ki ima vrh na dopolnilnem loku loka AB, njegova kraka potekata skozi krajišči loka, lok AB pa leži v kotu φ.

Talesov izrek o kotu v polkrogu: Če vrh kota φ leži na polkrožnici, kraka pa potekata skozi krajišči premera, potem je φ pravi kot.

10. Geometrijski liki in telesa

➢ <u>**Navedite formule za izračun ploščin paralelograma, trikotnika, deltoida in trapeza.**</u>

Paralelogram: $P = av_a$ ***Trikotnik:*** $P = \frac{cv_c}{2}$ ***Deltoid***: $P = \frac{ef}{2}$ ***Trapez:*** $\frac{(a+c)v}{2}$

➢ <u>**Navedite formule za izračun ploščin kvadrata, pravokotnika, romba, enakostraničnega trikotnika in pravokotnega trikotnika.**</u>

Kvadrat: $P = a^2$ **Pravokotnik:**$P = ab$ **Romb:**$P = \frac{ef}{2}$ **Enakostranični trikotnik**:$P = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **Pravokotni trikotnik:** $\frac{ab}{2}$

➢ <u>**Navedite formuli za ploščino in obseg kroga. Kako izračunamo dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka.**</u>

$$o = 2\pi r \,;\, P = \pi r^2$$

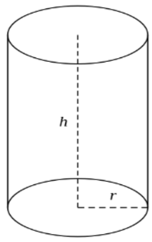
Krožni lok: $l = \frac{\pi r \alpha}{180°}$ **Ploščina krožnega izseka:** $p = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$

- **Opišite prizmo, kdaj je prizma**
  - ***Pokončna:*** ima vse stranske robove pravokotne na osnovno ploskev,
  - ***Enakoroba:*** ima vse robove enako dolge,
  - ***N-strana:*** osnovna ploskev je n-kotnik,
  - ***Pravilna:*** ima za osnovno ploskev pravilni n-kotnik.

- **Navedite formuli za prostornino prizme in površino pokončne prizme**

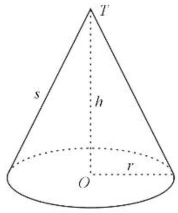
$$V = Sv\,; P = 2S + Pl$$

- **Opišite pokončni valj. Kaj je osni presek valja? Navedite formuli za površino in prostornino pokončnega krožnega valja.**



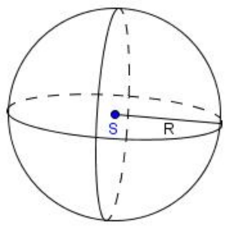
$$V = \pi r^2 v\,; P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

Osni presek valja je pravokotnik (pokončni), paralelogram (poševen) ali kvadrat (enakostranični).



- **Opišite piramido, kdaj je piramida**
  - ***Enakoroba***: ima vse robove enako dolge,
  - ***N-strana:*** ima za osnovno ploskev n-kotnik,
  - ***Pravilna:*** osnovna ploskev je pravilni n-kotnik.
- **Navedite formuli za površino in prostornino piramide**

$$V = \frac{1}{3}Sv\,; P = S + Pl$$



- **Opišite pokončni stožec. Navedite formuli za površino in prostornino.**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v\,; S = \pi r^2 + \pi r s$$

- **Kaj je krogla? Navedite formuli za površino in prostornino.**

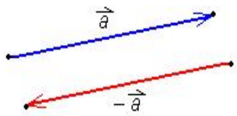
$$V = \frac{3}{4}\pi r^3; S = 4\pi r^2$$

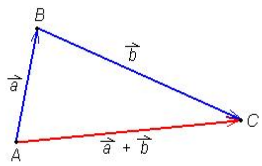
11. Vektorji v ravnini in prostoru

- **Kako seštevamo vektorje in kaj je vsota vektorjev? Definirajte ničelni vektor in nasprotni vektor danega vektorja. Kako odštevamo vektorje?**

Nasprotni vektor ima nasprotno orientacijo kot prvotni vektor.

Odštevanje vektorjev je prištevanje nasprotnega vektorja.





- **Definirajte množenje vektorja s številom. Kaj je skalarni produkt? Naštejte lastnosti te operacije. Kdaj sta vektorja kolinearna? Kaj je enotski vektor?**

Pri množenju vektorja $\vec{a}$ z realnim številnom n, dobimo za rezultat vektor $n\vec{a}$, ki je vzporeden, enako usmerjen (pozitivno število) ali obratno usmerjen (negativno število) večji (n večji od 1) ali manjši (n manjši od 1).

Skalarni produkt je računska operacija, ki ima za podatka vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, za rezultat pa realno število (skalar), ki ga izračunamo po pravilu:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$$

Lastnosti skalarnega produkta

Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ in za poljubno realno število *n* velja:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$$
$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$$
$$(n\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(n\vec{b}) = n(\vec{a}\,\vec{b})$$
$$\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Vektorja sta kolinearna, ko je možno enega izraziti z drugim oz. ga pomnožiti s skalarjem.

Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

- **Definirajte linearno kombinacijo vektorjev. Kaj je baza ravnine $\mathbb{R}^2$? Na koliko načinov lahko izrazimo vektor kot lienarno kombinacijo baznih vektorjev? Kaj je ortonomirana baza prostora $\mathbb{R}^3$?**

Linearna kombinacija vektorjev je vsak izraz, ki se ga da zapisati kot vsoto vektorjev pomnoženih s poljubnimi realnimi števili.

Baza je skupina vektorjev: bazni vektorji so med sabo neodvisni,

vsak drug vektor lahko izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

- **Definirajte skalarni produkt in naštejte njegove lastnosti. Navedite kriterij za ugotavljanje pravokotnosti dveh vektorjev.**

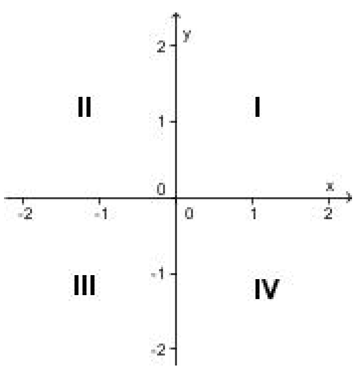
Vektorja sta ***pravokotna***, ko je njun skalarni produkt enak 0.

- **Kako izračunamo skalarni produkt vektorjev, izraženih s standardno ortonomirano bazo? Kako izračunamo dolžino vektorja in kot med vektorjema?**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

12. Pravokotni koordinatni sitem v ravnini

- **Opišite pravokotni koordinatni sistem v ravnini in izpeljite formulo za računanje razdalje med dvema točkama.**



$\lvert AB\rvert^2 = \lvert AT\rvert^2 + \lvert TB\rvert^2$	za kateti vstavimo: $\lvert AT\rvert = \lvert x_2 - x_1\rvert$ $\lvert TB\rvert = \lvert y_2 - y_1\rvert$
$\lvert AB\rvert^2 = \lvert x_2 - x_1\rvert^2 + \lvert y_2 - y_1\rvert^2$	ker kvadriramo, lahko brez škode izpustimo absolutno vrednost
$\lvert AB\rvert^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	enačbo korenimo
$\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	

- **Kaj je množica vseh točk T(x,y) v ravnini, ki ustrezajo naslednjim pogojem:**
    - $y = 0$
    - $x > 0$
    - $x \leq 0$ in $y \geq 0$
    - $x = -2$
    - $2 \leq y \leq 4$
    - $x^2 + y^2 \leq 4$

13. Funkcije

- **Definirajte pojem funkcije ter njenega definicijskega območja in zaloge vrednosti. Kaj je graf funkcije?**

Funkcija $f: A \rightarrow B$ je predpis, ki danemu podatku $x \in A$ priredi funkcijsko vrednost $f(x) \in B$.

Množica A je množica vseh podatkov, na katerih izvajamo funkcijo f; torej množica vseh podatkov, za katere je funkcija ***definirana.***

Množico vseh funkcijskih vrednosti, ki jih pri tem dobimo, imenujemo ***zaloga vrednosti funkcije.***

Graf funkcije je množica točk (x, y), za katere velja med koordinatama zveza $y = f(x)$, torej:

$$Gf = \{(x, y); y = f(x)\}$$

- **Kdaj je realna funkcija realne spremenljivke naraščajoča, padajoča, omejena, neomejena?**

Realna funkcija je funkcija, ki ima za funkcijske vrednosti (tj. za rezultate) vedno samo realna števila.

Funkcija narašča, če ima pri večjem podatku tudi večji rezultat. ***Funkcija pada***, če ima pri večjem podatku manjši rezultat.

Omejena je takrat, ko je navzgor in navzdol omejena (obstaja vrednost, ki je manjša/večja ali enaka funkciji)

- **Kdaj je realna funkcija realne spremenljivke soda in kdaj liha? Kako iz grafa ugotovimo, da je funkcija soda oz. liha?**

- Funkcija je **liha**, če za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ velja: $f(-x) = -f(x)$
  Graf lihe funkcije je simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.
- Funkcija je **soda**, če za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ velja: $f(-x) = f(x)$
  Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

14. Linearna funkcija

- **Definirajte linearno funkcijo. Kaj je njen graf? Kako je graf odvisen od smernega koeficienta? Kakšna sta grafa dveh funkcij z enakima smernima koeficientoma?**

Linearna funkcija je funkcija, ki jo lahko zapišemo z enačbo oblike $f(x) = kx + n$, kjer sta koeficienta k in n poljubni realni števili. Njen graf je PREMICA.

Če je $k < 0$ funkcija ***pada***, če je $k > 0$ funkcija ***narašča***, če je $k = 0$ je funkcija ***konstantna.***

Grafa dveh funkcij z enakima smernima koeficientoma sta vzporedna.

- **Napišite implicitno, eksplicitno in segmentno obliko enačbe premice. Enačbe katerih premic lahko zapišemo v teh oblikah?**

Eksplicitna: $y = kx + n$

Implicitna: $ax + by + c = 0$

Segmentna: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

- **Kako izračunamo kot med premicama v danem koordinatnem sistemu v ravnini? Kdaj sta premici vzporedni in kdaj pravokotni?**

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \qquad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

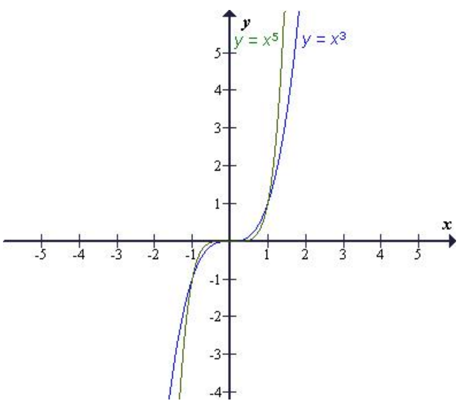
- **Zapišite družino vseh premic, ki**
  - So vzporedne premici z enačbo y = 3x + 5 ⇨ $y = 3x + n$
  - Potekajo skozi točko T(0,5) ⇨ $y = kx + 5$

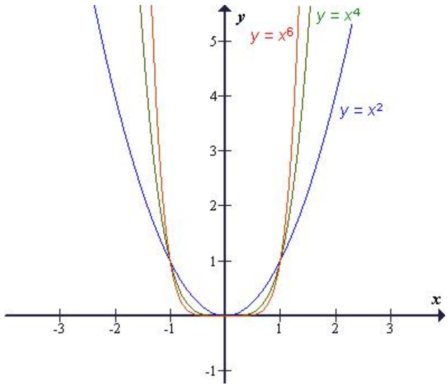
- **Kako v množici $\mathbb{R}$ rešujemo linearne neenačbe z eno neznanko? Kaj so množice rešitev?**

Linearno neenačbo z eno neznanko rešimo s preoblikovanjem po splošnih pravilih za reševanje neenačb. Rešitve po navadi sestavljajo neskončni interval, lahko pa se zgodi tudi, da je neenačba nerešljiva ali da je rešitev vsako realno število.

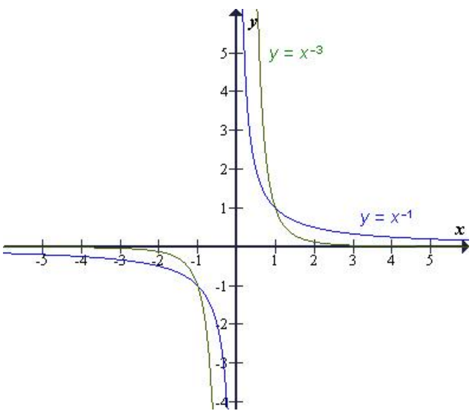
15. Potenčna funkcija

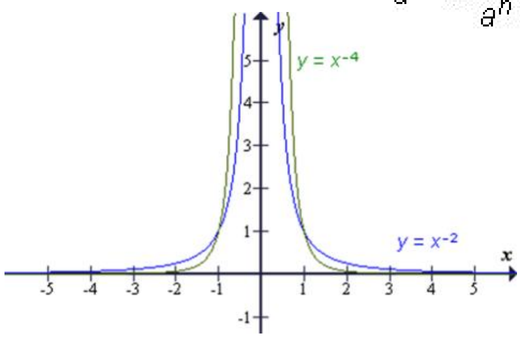
- **Definirajte potenčno funkcijo s celim eksponentom.**





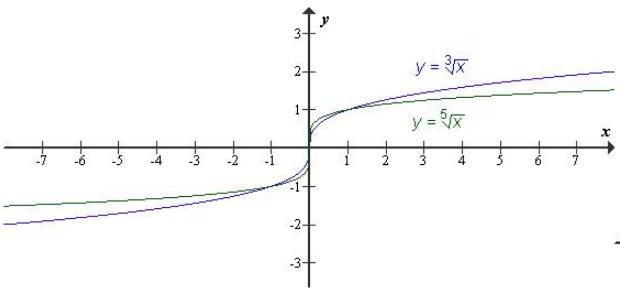
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{za } a \neq 0)$$

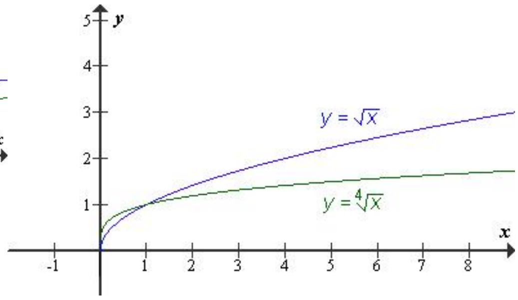




16. Korenska funkcija

➢ **Definirajte korensko funkcijo s predpisom $f(x) = \sqrt[n]{x}$; $(n \in \mathbb{N})$.**

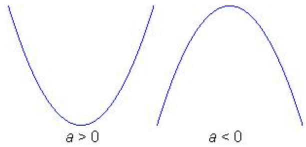




17. Kvadratna funkcija

➢ **Definirajte kvadratno funkcijo. Kaj je njeno definicijsko območje? Opišite pomen posameznih parametrov.**

Kvadratna funkcija je funkcija, ki jo lahko zapišemo z enačbo oblike $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer so koeficienti a, b in c poljubna realna števila in je vodilni koeficient a različen od 0.



A odloča o tem kako je obrnjena kvadratna funkcija.

C predstavlja presečišče z ordinatno osjo.

➢ **Zapišite splošni predpis za kvadratno funkcijo. Opiši pomen vodilnega koeficienta, prostega člena in diskriminante kvadratne funkcije.**

Splošni predpis: f (x) = ax2 + bx + c

Diskriminanta: nam pove, kako je z rešljivostjo v množici realnih števil:

- Če je D > 0, ima kvadratna enačba dve realni rešitvi ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).
- Če je D = 0, ima kvadratna enačba samo eno realno rešitev ($x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$).
- Če je D < 0, kvadratna enačba v realnem ni rešljiva ($x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$).

➢ **Kaj je teme grafa kvadratne funkcije in kako ga izračunamo? Zapišite temensko obliko predpisa kvadratne funkcije.**

Teme je točka T(p, q), v kateri kvadratna funkcija doseže ekstremno vrednost.

Temenska oblika: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad q = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

➢ **Zapišite kvadratno enačbo. Kako jo rešimo? Kako je z rešljivostjo v $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.**

Kvadratna enačba je vsaka enačba, ki jo lahko zapišemo v obliki $ax^2 + bx + c = 0$

Rešimo jo z razcepom, ali pa rešitve izračunamo po formuli:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

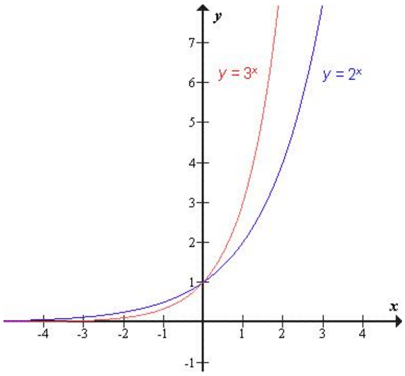
- **Kako rešujemo kvadratne neenačbe? Kaj je množica rešitev?**

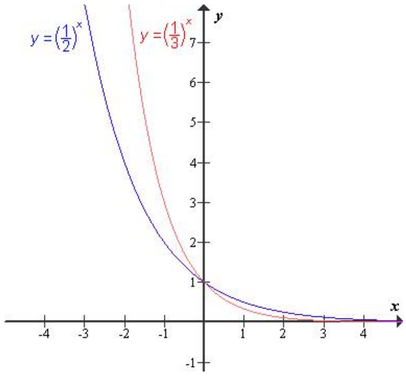
Kvadratno neenačbo najlažje rešimo s pomočjo grafa ustrezne kvadratne funkcije, množica rešitev je interval.

18. Eksponentna funkcija

- **Zapišite eksponentno funkcijo, povejte njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti. Narišite njen graf in opišite njene osnovne lastnosti.**

Eksponentna funkcija je funkcija, ki jo lahko zapišemo z enačbo $f(x) = a^x$ (kjer je osnova a dano pozitivno realno število).

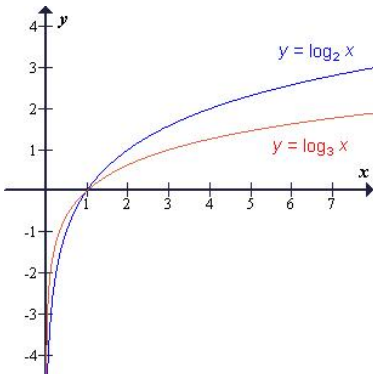


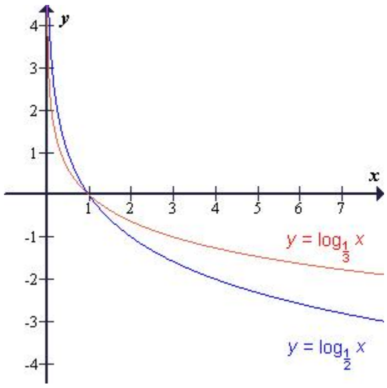


19. Logaritemska funkcija

- **Definirajte logaritemsko funkcijo z osnovo a, povejte njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti. Narišite njen graf in opišite njene osnovne lastnosti.**

Logaritemska funkcija je inverz eksponentne funkcije. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$





- **Navedite pravila za računanje z logaritmi**

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_c x = \frac{\log_a x}{\log_a c}$$

20. Polinomska funkcija

- **Definirajte polinom. Kako seštevamo in odštevamo polinome? Kdaj sta dva polinoma enaka?**

Polinom stopnje *n* ($n \in \mathbb{N}_0$) je vsaka funkcija, ki jo lahko zapišemo z enačbo oblike:
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Polinoma sta ***enaka***, ko sta polinoma iste stopnje in imata enake koeficiente a_n.

- **Povejte osnovni izrek o deljenju polinomov. Opišite deljenje z linearnim polinomom.**

Poljuben polinom deljenec p lahko delimo s poljubnim neničelnim polinomom deliteljem q in pri tem dobimo polinom količnik $k(x)$ in polinom ostanek $o(x)$, tako da velja
$\mathbf{p(x) = q(x)\,k(x) + o(x)}$

Pri deljenju polinoma p s polinomom prve stopnje je ostanek vedno število.

- **Opišite Hornerjev algoritem in pojasnite njegovo uporabnost.**

Hornerjev algoritem se uporablja za naslednje naloge:

  - deljenje danega polinoma p z linearnim polinomom (x - a),
  - računanje vrednosti danega polinoma p v točki a,
  - iskanje ničel danega polinoma p.
  - računanje vrednosti odvoda polinoma v dani točki.

- **Kaj je ničla polinoma? Koliko ničel ima polinom n-te stopnje? Kako zapišemo polinom, če poznamo vse njegove ničle?**

Če je število a ničla polinoma p, je ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom (x – a) enak 0.

Če poznamo vse njegove ničle ga lahko zapištemo kot produkt linearnih faktorjev.

- **Kako poiščemo cele in kako racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti?**

Z razcepljanjem, hornerjevim algoritmom, diskriminanta…

- **Razložite postopek risanja grafa polinoma. Kako vodilni koeficient in prosti člen vplivata na potek grafa polinoma? Kako se graf polinoma obnaša v okolici ničel?**

Izračunamo ničle, upoštevamo vodilni člen in stopnje ničel.

Vodilni koeficient nam pove ali je polinom na začetku pozitiven ali negativen, ***prosti člen*** nam pove, kje graf seka y-os. V ***okolici ničel*** graf lahko se dotakne x osi, jo seka ali naredi vodoravni prevoj.

- **Kje polinomska funkcija spremeni predznak? Kako rešujemo polinomske neenačbe?**

Predznak spremeni pri ničlah lihe stopnje, ***polinomske neenačbe*** rešujemo grafično.

21. Racionalna funkcija

➢ **Definirajte racionalno funkcijo, kaj je ničla in kaj je pol? opišite vedenje grafa v bližini ničel in polov.**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Ničle polinoma v števcu so ničle racionalne funkcije, ničle polinoma v imenovalcu so poli racionalne funkcije.

Ob polih se graf funkcije asimptotsko približuje, ***v ničlah*** se dotakne, seka ali naredi prevoj na x-osi.

➢ **V katerih primerih ima racionalna funkcija vodoravno asimptoto in kako jo določimo?**

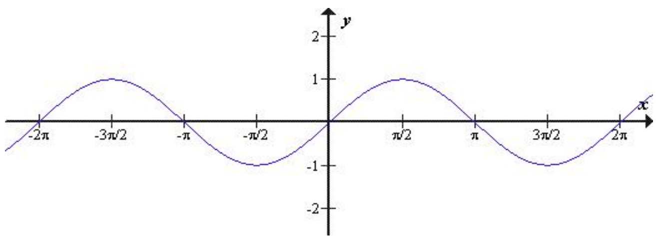
Kadar imamo v števcu in imenovalcu funkcijo iste stopnje.

➢ **Kje racionalna funkcija spremeni predznak?**

Ob ničlah lihe stopnje in ob polih lihe stopnje.

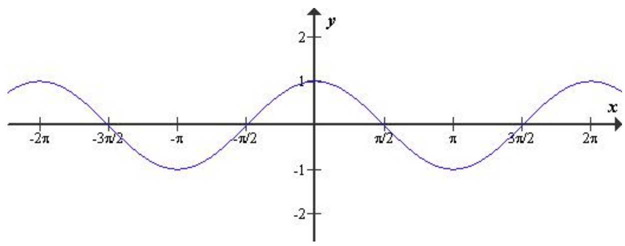
22. Kotne funkcije

➢ **Definirajte funkcijo sinus in opišite njene lastnosti**



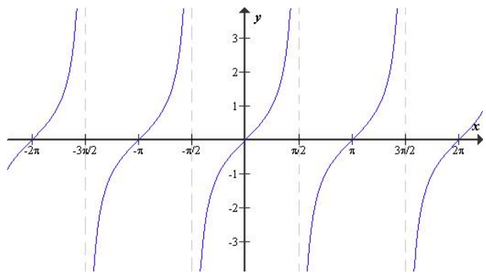
$D_f = \mathbb{R}$
$Z_f = [-1, 1]$
Ničle: $x = k\pi\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$
Maksimumi: $M(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$
Minimumi: $m(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$

➢ **Definirajte funkcijo kosinus in opišite njene lastnosti**



$D_f = \mathbb{R}$
$Z_f = [-1, 1]$
Ničle: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$
Maksimumi: $M(2k\pi, 1)\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$
Minimumi: $m(\pi + 2k\pi, -1)\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$

➢ **Definirajte funkcijo tangens in opišite njene lastnosti**



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$
$Z_f = \mathbb{R}$
Ničle: $x = k\pi\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$
Poli: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ \ k \in \mathbb{Z}$

➢ **Povejte in utemeljite zveze med kotnimi funkcijami komplementarnih, suplementarnih in nasprotnih kotov.**

$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$
$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$$

- **Definirajte kotne funkcije ostrega kota v pravokotnem trikotniku. Izpeljite osnovne zveze med njimi.**

Sinus: $\sin\alpha = \frac{nk}{hip}$ **Kosinus:** $\cos\alpha = \frac{pk}{hip}$

Tangens: $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{nk}{pk}$ **Kotangens:** $\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{pk}{nk}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\mathrm{ctg}\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\mathrm{tg}\ x\ \mathrm{ctg}\ x = 1$$

$$\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

- **Povejte adicijske izreke za sinus in kosinus. Izpeljite formuli za sinus in kosinus dvojnega kota.**

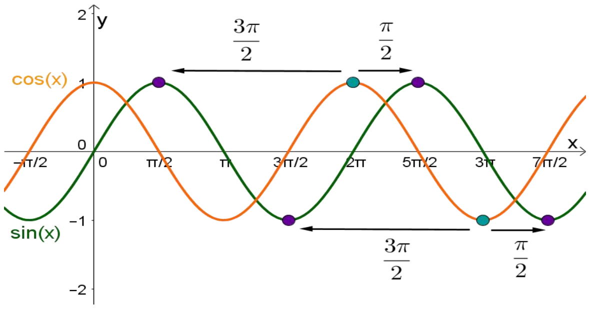
sin(x + y) = sin x cos y + cos x sin y ***sin 2x = 2 sin x cos x***

sin(x − y) = sin x cos y − cos x sin y

cos(x + y) = cos x cos y − sin x sin y ***cos 2x = cos² x − sin² x***

cos(x − y) = cos x cos y + sin x sin y

- **V istem koordinatnem sistemu narišite grafa sinus in kosinus. Izračunajte koordinate presečišč.**

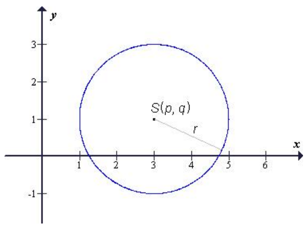


23. Stožnice

- **Povejte geometrijsko definicijo krožnice. Zapišite enačbo krožnice, ki ima središče v izhodišču S(p,q).**

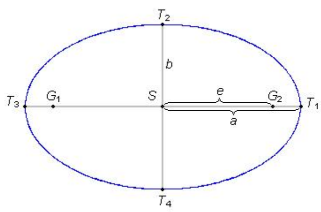
Krožnica je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od danega središča (S)

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$



- **Povejte geometrijsko definicijo elipse in zapišite enačbo elipse, katere osi ležita na koordinatnih oseh. Zapišite enačbo elipse, ki ima središče v točki S(p,q) in osi vzporedni koordinatnima osema.**

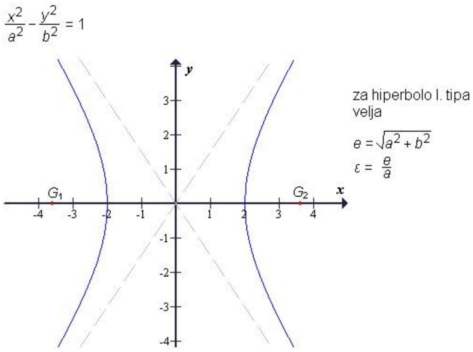
Elipsa je množica ravninskih točk, za katere je vsota razdalj do dveh danih točk konstantna. Ti dve točki imenujemo gorišči elipse (G_1 in G_2).

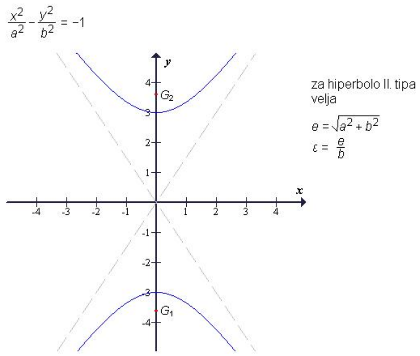


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

- **Povejte geometrijsko definicijo hiperbole in zapišite enačbo hiperbole, katere osi ležita na koordinatnih oseh.**

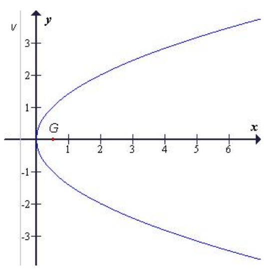
Hiperbola je množica ravninskih točk, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj do dveh danih točk konstantna. Ti dve točki imenujemo gorišči hiperbole (G_1 in G_2).

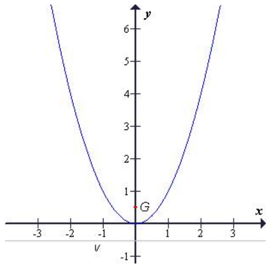




➢ **Povejte geometrijsko definicijo parabole in napišite njeno enačbo. Zapišite koordinati gorišča in enačbo premice vodnice s temenom v koordinatnem izhodišču.**

Parabola je množica ravninskih točk, ki so enako oddaljene od dane premice vodnice (v) in od dane točke, ki jo imenujemo gorišče (G). $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$





24. Zaporedja in vrste

➢ **Kaj je zaporedje? Kdaj narašča, kdaj je omejeno?**

Zaporedje je funkcija, ki vsakemu naravnemu številu priredi natanko določeno realno število.

Narašča, če za vsak indeks n velja $a_n < a_{n+1}$
Pada, če za vsak indeks n velja $a_n > a_{n+1}$

Zaporedje ***je omejeno***, če je omejeno navzgor in navzdol:

Zaporedje je ***navzgor omejeno***, če obstaja realno število M, da so vsi členi zaporedja manjši ali enaki M; $\boldsymbol{a_n \leq M}$.
Zaporedje je ***navzdol omejeno***, če obstaja realno število m, da so vsi členi zaporedja večji ali enaki m; $\boldsymbol{a_n \geq m}$.

➢ **Navedite pravila za računanje z limitami konvergentnih zaporedij**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n \div \lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot k)=k\cdot\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^r=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^r$$

- **Kdaj je zaporedje aritmetično? Zapišite splošni člen in obrazec za vsoto prvih n členov. Kaj je aritmetična sredina dveh števil?**

Zaporedje je ***aritmetično***, če je razlika med poljubnim n členom in predstoječim členom konstantna.

$$a_{n+1} - a_n = d$$; število d je diferenca aritmetičnega zaporedja.

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$ Splošni člen aritmetičnega zaporedja.

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n);$$ Vsota n členov

Vsak člen aritmetičnega zaporedja lahko zapišemo kot aritmetično sredino simetrično ležečih členov.

$$a_n = \frac{a_{n-r} + a_{n+r}}{2}; n > r$$

- **Kdaj je zaporedje geometrijsko? Zapišite splošni člen in vsoto n členov. Kaj je geometrijska sredina dveh števil?**

Zaporedje je ***geometrijsko***, če je količnik med poljubnim in stoječim n členom konstanten.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1};$$ splošni člen geometrijskega zaporedja

$$S_n = \frac{a_n(k^n - 1)}{k-1};$$ Vsota n členov

Geometrijska sredina dveh pozitivnih realnih števil a in v je $\sqrt{a \cdot b}$

- **Kaj je vrsta in kdaj je konvergentna?**

Vrsto dobimo, če seštejemo prvih nekaj n členov geometrijskega ali aritmetičnega zaporedja. Tako dobimo končno geometrijsko/ aritmetično vrsto.

Konvergentna je takrat, ko ima limito.

- **Kdaj obstaja vsota neskončnega geometrijskega zaporedja in kolikšna je?**

Če je zaporedje delnih vsot s splošnim členom S_n konvergentno in ima limito S, neskončna vrsta konvergira, njena limita S pa je vsota vrste.

$$S = \frac{a_1}{1-k}$$

- **Opišite osnovne pojme obrestnega računa: glavnica, obresti, obrestovalni faktor in kapitalizacijsko obdobje. Opišite navadno in obrestno obrestovanje. Kako obračunamo obresti pri prvem in kako pri drugem?**

Znesek kredita imenujemo ***glavnica*** ali kapital. Označimo jo z oznako G.

Znesek, ki ga moramo odplačati poleg glavnice, imenujemo **obresti**. Označimo jih z oznako **o**.

Obrestna mera je v odstotkih izražen znesek, ki ga po nekem obdobju obrestovanja pripišemo glavnici. Označimo jo z oznako **p** (v %).

Obrestovalna doba imenujemo obdobje, v katerem se nam na glavnico pripišejo obresti. Označimo jo s črko **m** ali **n**.

Letno obrestovalno dobo imenujemo tudi **osnovna obrestovalna doba** ali **kapitalizacijska doba**.

Navadno ali **enostavno obrestovanje** je obrestovanje, pri katerem se ves čas obrestuje le začetni kapital brez dodanih obresti.

$$o = G \cdot n \cdot p\%$$

- **Opišite primer varčevanja na banki, ki uporablja obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti. Kako izračunamo višino privarčevanega zneska?**

Obrestno obrestovanje je obrestovanje, pri katerem se poleg začetnega kapitala obrestujejo tudi obresti. To pomeni, da v vsakem obrestovalnem obdobju dobljene obresti prištejemo glavnici in v nadaljnjem obrestovalnem obdobju obrestujemo glavnico s prištetimi obrestmi iz predhodnega obdobja.
Obrestno obrestovanje prinaša večje obresti kot navadno obrestovanje, saj se namesto glavnice v bistvu obrestuje kapital, ki se povečuje z zaključkom vsakega obrestovalnega obdobja.

$$G_n = G(1 + \frac{p}{100})^n$$

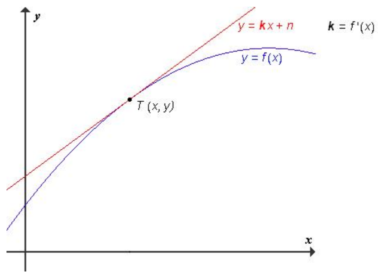
****Opišite primer obročnega odplačevanja posojila na banki, ki uporablja obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti. Kako izračunamo višino obroka?**

25. Diferencialni račun

- **Definirajte odvod funkcije f v dani točki. Kakšen je njegov geometrijski pomen?**

Odvod funkcije f v točki $T(x, y)$ je smerni koeficient tangente na graf te funkcije v tej točki.

Označimo ga $f\,'(x)$.



- **Navedite pravila za računanje odvoda vsote, produkta in kvocienta funkcij ter odvoda produkta funkcije s številom.**

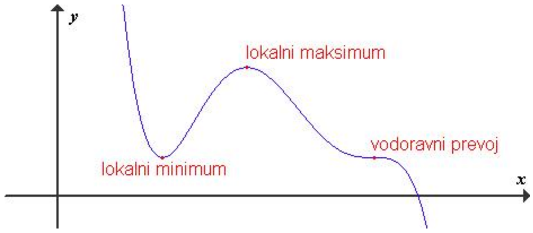
Funkcija	Odvod
$A\,f(x)$	$A\,f\,'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f\,'(x) + g'(x)$
$f(x)\,g(x)$	$f\,'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f\,'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$
$f(g(x))$	$f\,'(g(x))\,g'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

- **Definirajte lokalni ekstrem funkcije in globalni max/min. Kako določimo globalne ekstreme odvedljive funkcije na danem zaprtem intervalu?**

Lokalni minimum je najnižja točka v neki okolici. Spoznamo ga po tem, da funkcija levo od minimuma pada, desno pa narašča, torej je odvod funkcije levo od minimuma negativen, desno pa pozitiven.

Lokalni maksimum je najvišja točka v neki okolici. Spoznamo ga po tem, da funkcija levo od maksimuma narašča, desno pa pada, torej je odvod funkcije levo od maksimuma pozitiven, desno pa negativen.



- **Kaj je stacionarna točka? Kako z odvodom poiščemo intervale naraščanja in padanja odvedljive funkcije? Kako z odvodom ugotovimo, ali je v stacionarni točki ekstrem?**

Stacionarna točka funkcije je točka, v kateri je odvod funkcije enak 0. To pomeni, da je tangenta v stacionarni točki vodoravna.

Intervale naraščanja in padanja ugotovimo z računanjem stacionarnih točk. Pomagamo si z grafičnim reševanjem, narišemo ničle in ugotovimo kje je odvod negativen in kje pozitiven. To nam hkrati pove tuti naraščanje in padanje odvajane funkcije.

- **Kako izračunamo kot med grafom funkcije f in abcisno osjo? Kako izračunamo kot med grafoma funkcij f in g?**

Naklonski kot grafa funkcije v dani točki definiramo kot naklonski kot tangente na graf te funkcije v tej točki in ga izračunamo po znani formuli: $\operatorname{tg} \alpha = k$

Kot med grafoma izračunamo po enačbi:

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$$

26. Integralski račun

- **Definirajte nedoločeni integral funkcije f. Kako izračunamo nedoločen integral vsote oz. razlike dveh funkcij in nedoločeni integral produkta funkcije s številom.**

Nedoločeni integral funkcije f označimo $\int f(x)\,dx$. Torej velja: $\int f(x)\,dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Osnovna pravila integriranja

$$\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$$

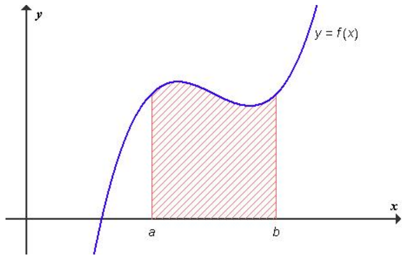
$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{za vsak } n \in \mathbb{R},\ n \neq -1)$$

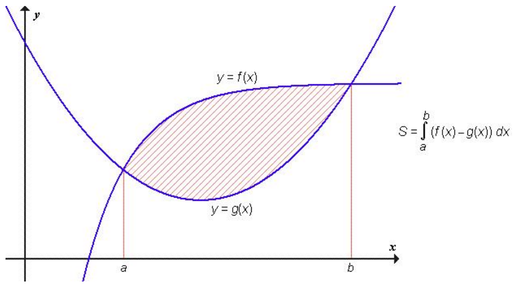
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

- **Pojasnite geometrijski pomen določenega integrala zvezne funkcije na danem intervalu in osnovno formulo integralskega računa.**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{pri čemer je } F(x) = \int f(x)\,dx$$



- **Kako z določenim integralom izračunamo ploščino lika, omejenega z grafom dveh funkcij?**



27. Kombinatorika

- **Povejte osnovni izrek kombinatorike in pravilo vsote, kaj je kombinatorično drevo?**

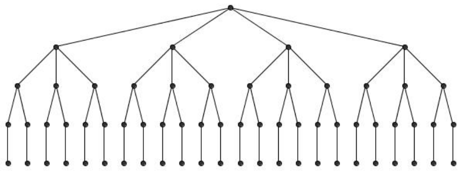
Pravilo produkta ali **Osnovni izrek kombinatorike**:
Naj proces odločanja poteka v k zaporednih fazah in je v prvi fazi n_1 izborov, v drugi fazi n_2 izborov in tako naprej v k fazi n_k izborov. Naj bo število izborov v posamezni fazi neodvisno od izbire v predhodni fazi.

$$\boldsymbol{N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$$

Uporabo osnovnega izreka kombinatorike razložite na primeru.

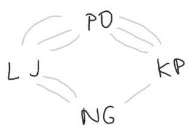
Na izbiro imamo cifre 1, 2, 3, 4.
Koliko tri-mestnih števil lahko sestavimo, če se nobena cifra ne ponovi?
$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Pravilo vsote:
Če imamo na voljo ***m*** možnosti iz prve skupine in ***n*** možnosti iz druge skupine, izbrati pa želimo točno eno možnost iz prve **ali** iz druge skupine, potem imamo na izbiro skupno ***m + n*** možnosti.



Uporabo pravila vsote razložite na primeru.
Potujemo iz Ljubljane v Koper:

- Ljubljana – Postojna – Koper
  a) Iz Ljubljane do Postojne imamo 3 možnosti prevoza (avtobus, vlak, rolerji)
  b) Iz Postojne do Kopra imamo 3 možnosti prevoza (kolo, moped, letalo)
- Ljubljana – Nova Gorica – Koper
  a) Iz Ljubljane do Nove Gorice imamo 2 možnosti prevoza (skiro, avtomobil)
  b) Iz Nove Gorice do Kopra imamo 1 možnost prevoza (motor)



LJ - PO - KP = 3 · 3 = 9
\+
LJ - NG - KP = 2 · 1 = 2
11

➢ **Kaj so permutacije brez ponavljanja in koliko jih je? Kaj so permutacije s ponavljanjem? Koliko jih je?**

Permutacije so razporeditve danih n elementov na n prostih mest.

Če so vsi elementi med seboj različni, so to ***permutacije brez ponavljanja.*** ***$P_n = n!$***

Permutacije s ponavljanjem so permutacije elementov, ki niso vsi med sabo različni

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!}$$

➢ Kaj so variacije brez ponavljanja in kaj variacije s ponavljanjem? Koliko jih je?

➢ **Kaj so variacije brez ponavljanja in koliko jih je?**
Variacije reda r iz n elementov so vse možne razporeditve n elementov na r mest in se vsak element pojavi kvečjemu enkrat.

$$V_n^{\,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

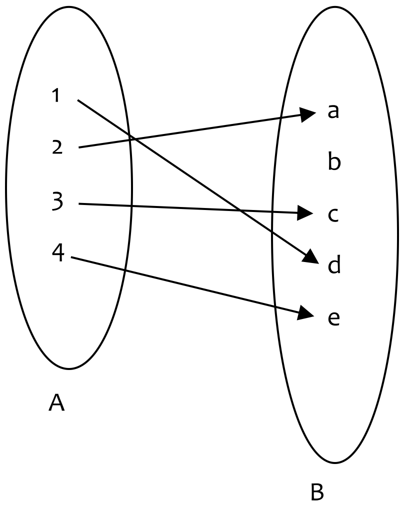
➢ **Povejte primer variacije brez ponavljanja.**
Na listkih v škatli imamo napisane številke: 2 3 4 5 7 9
Listke vlečemo enega za drugim in jih ne vračamo nazaj v škatlo. Koliko trimestnih števil lahko sestavimo? n = $V_6^{\,3}$ = 6 * 5 * 4

➢ **Kaj so variacije s ponavljanjem in koliko jih je?**
Variacije reda r iz n elementov s ponavljanjem so vse možne razporeditve n elementov na r mest, pri čemer elemente izbiramo iz množice z n elementi in dopuščamo ponavljanje.

$${}^{p}V_n^{\,r} = n^r$$

➢ **Povejte primer variacije s ponavljanjem.**
Na listkih v škatli imamo napisane številke: 2 3 4 5 7 9
Koliko trimestnih števil lahko sestavimo, če se cifre lahko ponavljajo? n = ${}^{p}V_6^{\,3} = 6^3$ = 216

Naj ima množica A moč r, naj ima množica B moč n in naj bo r < n. Koliko je vseh injektivnih funkcij iz množice A v množico B?



Možnosti: d a c e

A … r elementov

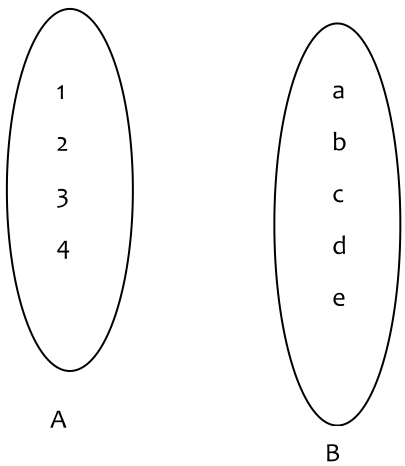
B … n elementov

Vseh injektivnih preslikav iz f: A → B

$$V_n^{\ r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(variacije brez ponavljanja)

Naj bosta A in B končni množici. Koliko je vseh funkcij iz množice A v množico B?



A … r elementov

B … n elementov

Vseh preslikav iz f: A → B

$${}^{p}V_n^{\ r} = n^r$$

(variacije s ponavljanjem)

Povejte pravilo vključitev in izključitev za dve množici ter ga razložite na primeru.

Pri izbiranju iz več množic moramo paziti, da je vsak element upoštevan natanko enkrat.
Kadar torej izbiramo med elementi ene ali druge množice, pa se nekateri elementi lahko pojavijo v obeh množicah (presek množic ni prazen), dobimo število vseh elementov tako, da seštejemo št. elementov v prvi množici s številom tistih v drugi in odštejemo število elementov v preseku (te smo te upoštevali dvakrat).

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

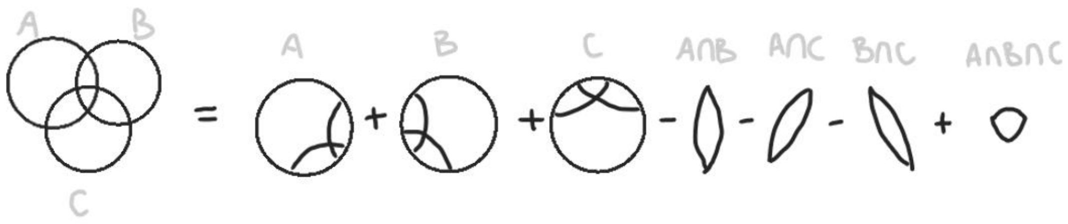
Če izbiramo med elementi treh množic, moramo najprej sešteti števila elementov vseh posameznih množic, odšteti število elementov v presekih po dveh množic in prišteti število elementov, ki nastopajo v preseku vseh treh množic (te smo najprej trikrat prišteli, nato trikrat odšteli in jih moramo torej še enkrat vključiti).

$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$

Analogno ravnamo, če se število množic še povečuje.

***(VR)*Povejte pravilo vključitev in izključitev za tri množice.**

$A \cup B \cup C$



$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$$

- **Kaj so kombinacije in koliko jih je? Kaj je binomski simbol in kako ga izračunamo? Navedite lastnosti binomskih simbolov.**

Kombinacije brez ponavljanja so izbire *r* (različnih) elementov izmed *n* različnih elementov, ki so na voljo.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{oziroma} \qquad C_n^r = \binom{n}{r}$$

Binomski simbol: podmnožice moči r iz množice n elementi.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

- **Kaj so kombinacije brez ponavljanja in koliko jih je?**

Kombinacije brez ponavljanja so izbire r (različnih) elementov izmed n različnih elementov, ki so na voljo. Število kombinacij brez ponavljanja izračunamo po enaki formuli kot binomski simbol.

$$^{(p)}C_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

- **Povejte primer kombinacije brez ponavljanja.**

Nogometni trener ima v prvem moštvu 5 napadalcev. Za tekmo želi izbrati 2, to lahko stori na $\binom{5}{2}$ = 10 načinov.

- **Povejte binomski izrek.**

Binomski izrek je izrek, ki opisuje potenciranje binoma ali dvočlenika z nekim naravnim številom ali 0.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- **Razčlenite izraz $(a+b)^4$**

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

- **Naj bo *n* naravno število. Koliko podmnožic ima množica z n elementi?**

Iz binomskega izreka tudi sledi, da je vsota posamezne vrstice v Pascalovem trikotniku enaka 2^n. Število podmnožic neke množice z n elementi je enako 2^n, torej je moč potenčne množice množice A enako 2^n.

Število podmnožic množice z močjo n lahko zapišemo kot število podmnožic z močjo 0 + število podmnožic z močjo 1 + · ·· + število podmnožic z močjo n, ali drugače

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, kar ustreza n-ti vrstici Pascalovega trikotnika.

Táko binomsko vrsto pa lahko dobimo le, če potenciramo binom $(1+1)^n$, kar pa je enako 2^n.

➢ **Opišite vsaj tri lastnosti računanja z binomskimi simboli.**

- $\binom{n}{0} = \binom{\eta}{n} = 1$ iz množice z n elementi lahko na en sam način izberemo 0 elementov + iz množice z n elementi lahko na en sam način izberemo n elementov
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ binomski simbol je simetričen
- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

(VR) Za nenegativni celi števili n in r, kjer je r $\leq$ n, opišite zvezo med številoma V^r_n in C^r_n.

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{r!}$$

➢ **Opišite Pascalov trikotnik in razložite, kako je povezan z binomskimi simboli. Navedite lastnosti binomskih simbolov.**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

➢ **Opišite povezavo med binomskim izrekom in Pascalovim trikotnikom.**

Binomski koeficient oziroma binomski simbol je enak

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Vrednost binomskega koeficienta je odgovor na vprašanje: »Koliko je podmnožic z močjo r množice z močjo n?«

Pascalov trikotnik je trikotnik kjer so v vrsticah in stolpcih zapisani posamezni binomski koeficienti.

(VR) Moč množice A je n. Koliko je moč potenčne množice množice A? Dokažite.

Iz binomskega izreka tudi sledi, da je vsota posamezne vrstice v Pascalovem trikotniku enaka 2^n. Število podmnožic neke množice z n elementi je enako 2^n, torej je moč potenčne množice množice A enako 2^n.

Število podmnožic množice z močjo n lahko zapišemo kot število podmnožic z močjo 0 + število podmnožic z močjo 1 + · ·· + število podmnožic z močjo n, ali drugače

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, kar ustreza n-ti vrstici Pascalovega trikotnika.

Táko binomsko vrsto pa lahko dobimo le, če potenciramo binom $(1+1)^n$, kar pa je enako 2^n.

- **Opišite vsaj dve lastnosti binomskih koeficientov v Pascalovem trikotniku.**

1. Osnovne vrednosti binomskih simbolov:

   $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

   Koeficienti ob levi in desni strani Pascalovega trikotnika so vedno enaki 1 – kar lahko vidimo tudi na zgornji skici Pascalovega trikotnika.

2. Simetričnost:

   $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

   Simetričnost binomskih koeficientov se kaže tudi v simetričnosti Pascalovega trikotnika.

3. Aditivnost:

   $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Vsako novo vrstico (razen prvega in zadnjega koeficienta v vrstici) dobimo iz prejšnje po pravilu aditivnosti: koeficienta levo in desno zgoraj od zelenega se seštejeta ravno vanj. Tako lahko precej

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1: & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2: & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3: & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{1} & & \\
n=4: & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5: & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

enostavno zapišemo prvih nekaj vrstic Pascalovega trikotnika.

28. Verjetnostni račun

➢ **Opišite osnovne pojme verjetnostnega računa: poskus, dogodek (nemogoč, gotov, slučajni, elementarni, sestavljeni) in definirajte verjetnost dogodka.**

Poskus: zaporedje določenih dejavnosti, ki se vedno zgodijo v istem zaporedju. Rezultat poskusa je dogodek.

Verjetnostni poskus je poskus, katerega rezultat je odvisen od naključja.

Dogodek (slučajni dogodki, nemogoči in gotovi dogodki, elementarni dogodki, sestavljeni dogodki):

Nemogoč dogodek je dogodek, ki se nikoli ne zgodi. Označimo ga N. Predstavlja ga prazna množica izidov, torej: N = { }.

Gotov dogodek je dogodek, ki se zgodi vedno. Označimo ga G. Predstavlja ga univerzalna množica - to je množica vseh možnih izidov danega poskusa.

Slučajen dogodek je dogodek, ki je odvisen od slučaja, ki ga ne moremo nadzorovati. Je dogodek, ki se zgodi ali se ne zgodi pri ponovitvi poskusa.

Elementaren dogodek je osnoven dogodek oz. dogodek, ki se ga ne da zapisati kot vsoto ali produkt nekih drugih dogodkov. ***Sestavljen dogodek*** je sestavljen iz več elementarnih dogodkov.

Vzorčni prostor je množica vseh elementarnih dogodkov. **Popolni sistem dogodkov poskusa:** če se v vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden od dogodkov iz množice.

Verjetnost dogodka *A* je razmerje med številom ugodnih izidov in številom vseh možnih izidov.

$$P(A) = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh možnih izidov}} \quad \text{oziroma} \quad P(A) = \frac{m}{n}$$

➢ **Kaj je vsota dogodkov in kaj je nasprotni dogodek? Kako izračunamo verjetnost nasprotnega dogodka in verjetnost vsote dogodkov?**

Vsota ali unija dogodkov *A* in *B* je dogodek, ki se zgodi, kadar se zgodi vsaj eden od danih dogodkov - ali *A* ali *B* ali oba. Če dogodka predstavimo z množicama ugodnih izidov, tej operaciji ustreza unija množic, zato uporabljamo tudi isto poimenovanje in isto oznako: $A \cup B$.

Nasprotni dogodek danega dogodka *A* je dogodek, ki se zgodi točno takrat, ko se dogodek *A* ne zgodi. Če dogodek *A* predstavimo z množico ugodnih izidov, nasprotnemu dogodku ustreza komplement množice A. Nasprotni dogodek označimo A'.

Verjetnost nasprotnega dogodka:
$P(A') = 1 - P(A)$ oziroma $P(A) + P(A') = 1$

Verjetnost unije dogodkov (splošno):
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\,B)$

➢ **(VR) Povejte primer poskusa in navedite nekaj dogodkov v tem poskusu. Kateri med njimi so nemogoči, gotovi, elementarni in sestavljeni?**

Vržemo igralno kocko.

ELEMENTARNI DOGODKI:

$E_1 = \{1\}$ $E_4 = \{4\}$

$E_2 = \{2\}$ $E_5 = \{5\}$

$E_3 = \{3\}$ $E_6 = \{6\}$

SESTAVLJENI DOGODKI:

A.... pade sodo št. pik → $A = E_2 \cup E_4 \cup E_6$

B.... pade več kot 4 pike → $B = E_5 \cup E_6$

NEMOGOČI DOGODEK:

$N = \emptyset$

GOTOVI DOGODEK:

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – vržeš vsaj 1 piko

- **Kaj je relativna frekvenca danega dogodka? Definirajte empirično (statistično) verjetnost. **Povejte primer.**

Relativna frekvenca danega dogodka je razmerje med številom vseh ponovitev in številom vseh realizacij.

n... število vseh ponovitev
n_A... število vseh realizacij
f_A... relativna frekvenca dogodka A

$f_A = n_A/n$ (ulomek)

Statistična definicija verjetnosti: Verjetnost dogodka A v proučevanem poskusu je število P(A), pri katerem se ustali relativna frekvenca dogodka A v dovolj velikem številu ponovitev tega poskusa.

- **Povejte klasično (matematično) definicijo verjetnosti. Navedite primer.**

Verjetnost dogodka A v nekem poskusu je razmerje med številom ugodnih elementarnih dogodkov za nastop danega dogodka in številom vseh elementarnih dogodkov v tem poskusu.

m... število za A ugodnih elementarnih dogodkov

n... število vseh elementarnih dogodkov

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Pogoj, da je definicija v redu je, da imajo vsi elementarni dogodki enako verjetnost.

Primer: Šestkrat vržemo kocko. Kolikšna je verjetnost, da vržemo sodo število pik.

A... sodo število pik
n = 6
m = 3

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- **Povejte vsaj dve lastnosti verjetnosti.**

P(N) = 0 ... verjetnost nemogočega dogodka je enaka 0

P(A') = 1 – P(A) ... verjetnost nasprotnega dogodka je enaka 1 – verjetnost A

➢ **Definiraj vsoto in produkt dogodkov.**

Vsota ali unija dogodkov A in B je nov dogodek A ∪ B (A + B), ki se zgodi, če se zgodi dogodek A ali dogodek B.

Produkt ali presek dogodkov A in B je nov dogodek A ∩ B (A x B), ki se zgodi, če se zgodita dogodka A in B hkrati.

➢ **Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva in kdaj združljiva? Kako izračunamo verjetnost vsote dveh združljivih dogodkov?**

Če se dogodka A in B ne moreta zgoditi hkrati ju imenujemo **nezdružljiv** dogodek, njun produkt pa je nemogoč dogodek. Če produkt ni nemogoč dogodek pa sta A in B **združljiva** dogodka.

Verjetnost vsote dveh združljivih dogodkov:

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

➢ **Povejte primer dveh nezdružljivih dogodkov in primer dogodka in njemu nasprotnega dogodka.**

Primer dveh nezdržljivih dogodkov: A-pri metu kocke pade sodo število pik, B-pri metu kocke padejo tri pike. Velja A∩B=N.

Naj bo primer dogodka dogodek B. Nasportni dogodek: B' – pri metu kocke padejo 1,2,4,5 ali 6 pik.

(VR) Definirajte pogojno vrednost.

Pogojna verjetnost je verjetnost dogodka, pod pogojem, da se je neki drug dogodek že zgodil. ($P(A/B)$, beri: verjetnost A, pri pogoju, da se je zgodil B.)

****Definirajte Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov. Kako izračunamo verjetnost, da se v n ponovitvah poskusa dani dogodek zgodi natanko k-krat?**

Bernoullijevo zaporedje je zaporedje neodvisnih poskusov, pri katerih se v vsakem poskusu zanimamo le za to, ali se zgodi dani dogodek A ali pa njegova negacija A'.

Verjetnost, da se v n ponovitvah poskusa dani dogodek zgodi natanko k-krat:

$$P(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

****Povejte primer zaporedja neodvisnih poskusov, ki ni Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov.**

(VR) Kdaj sta dogodka odvisna in kdaj neodvisna? Kako izračunamo verjetnost produkta dveh odvisnih dogodkov?

Če dogodek A ne vpliva na verjetnost dogodka B in obratno, sta dogodka A in B **neodvisna**.

Če sta dogodka A in B **odvisna**, potem je verjetnost dogodka B različna v primeru, če se je dogodek A zgodil ali ne. Verjetnost dogodka B v primeru, če se je dogodek A zgodil, imenujemo **pogojna verjetnost** dogodka B pri pogoju A in jo označimo P(B/A).

Verjetnost produkta dveh odvisnih dogodkov:

P(A∩B) = P(A) P(B/A)

(VR) Povejte primer dveh neodvisnih dogodkov in izračunajte verjetnost produkta teh dveh dogodkov.

Verjetnost produkta dveh neodvisnih dogodkov:

P(A∩B) = P(A) P(B)

Primer:

Igralno kocko vržemo dvakrat zapored.

dogodek A:

1. met: sodo število $A_1 = \{2, 4, 6\}$

2. met: število pik je deljivo s tri $A_2 = \{3, 6\}$

$A = A_1 \cap A_2$ (dogodka A_1 in A_2 sta neodvisna)

$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

29. Statistika

➤ **Opišite osnovne statistične pojme: populacija, vzorec, statistična doba, statistični znak, statistični parameter.**

Vsak posamezni element imenujemo **statistična enota**, celotno množico pa imenujemo **populacija.**

Če je populacija prevelika, raziskavo opravimo na **vzorcu** - na delu populacije.

Lastnost, ki jo preučujemo pri posamezni statistični enoti, se imenuje **statistični znak**.

Statistični parametri so splošne lastnosti, ki veljajo za populacijo kot celoto in jih dobimo kot rezultat statistične raziskave.

➤ **Razložite statistične pojme: aritmetična sredina, mediana, modus. Kako jih izračunamo?**

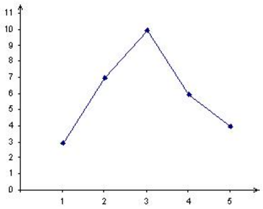
Aritmétična sredína niza podatkov je v matematiki in statistiki seštevek vseh vrednosti, razdeljen na skupno število teh vrednosti oziroma podatkov.

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_n f_n}{N}$$

Mediana (ali **središčnica**) je statistični parameter, ki podaja srednjo vrednost statističnega znaka.

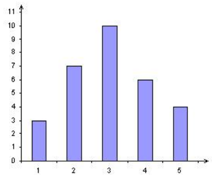
Modus (ali **gostiščnica**) je statistični parameter, ki nam pove, katera vrednost v porazdelitvi nastopa največkrat.

➤ **Opišite tri različne načine prikazovanja statističnih podatkov.**

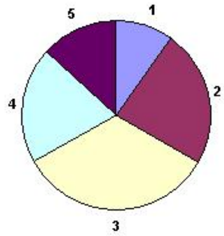


Frekvenčni poligon
Na vodoravno os nanašamo različne vrednosti statističnega znaka (v tem primeru različne ocene), na navpično os pa frekvence (tj. število učencev, ki imajo določeno oceno).

Histogram ali **stolpčni diagram**
Na vodoravno os nanašamo različne vrednosti statističnega znaka (v tem primeru različne ocene), na navpično os pa frekvence (tj. število učencev, ki imajo določeno oceno).



Krožni diagram ali **frekvenčni kolač**
Vsako vrednost statističnega znaka predstavlja krožni izsek. Velikost krožnega izseka je premo sorazmerna s frekvenco (tj. s številom učencev, ki imajo določeno oceno).



- **Razložite pojme: variacijski razmik, standardni odklon in medčetrtinski razmik.**

Standardni odklon: pove nam, ta koliko vrednosti statističnega znaka odstopajo od povprečja.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\bar{x}-x_1)^2 f_1 + (\bar{x}-x_2)^2 f_2 + (\bar{x}-x_3)^2 f_3 + \ldots + (\bar{x}-x_n)^2 f_n}{N}}$$

Razpon od prvega do tretjega kvartila imenujemo **medčetrtinski razmik** ali **kvartilni razmik (*QR*)**.

Mediana razdeli zaporedje vrednosti na dva enako velika dela. Če vsakega od teh dveh delov spet razdelimo na dva enaka dela, potem dobljene delilne točke imenujemo **kvartili**.

Druga mera razpršenosti pa je razpon od najmanjše do največje vrednosti statističnega znaka. To število imenujemo **variacijski razmik (*VR*)**.

$QR = Q_3 - Q_1$
$VR = x_{max} - x_{min}$