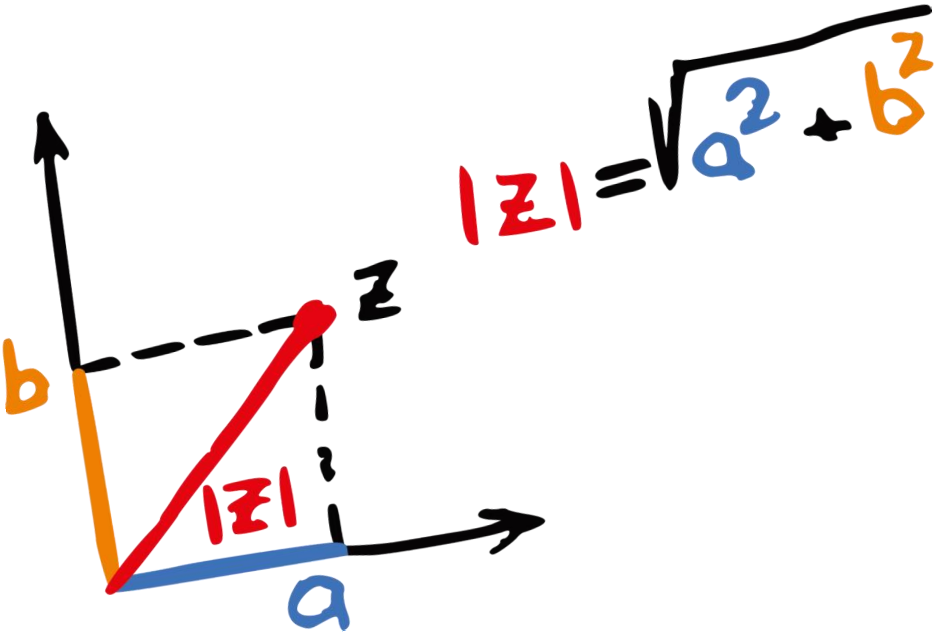
MATEMATIKA

Zapiski za 2. letnik



Potence z racionalnimi eksponenti

Definicija potence z naravnim eksponentom

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ faktorjev}} = \underset{\text{osnova}}{a}^{\overset{\text{eksponent}}{n}} ;\quad n\in\mathbb{Z}$$

Če v eksponentu nastopa katerokoli racionalno število, ji rečemo potenca z racionalnim eksponentom.

Pomembne lastnosti

osnovno

$$\boxed{a^0 = 1 \qquad a^1 = a}$$

$$5^0 = 1 \qquad 7^1 = 7$$

negativni eksponent

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$4^{-1} = \frac{1}{4} \qquad 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

potenca → koren

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

*(več pod koreni)

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \qquad a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$$

Pravila za računanje s potencami

I. Množenje potenc z enakimi osnovami

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

osnovo prepišemo, stopnji seštejemo

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$$

2. Deljenje potenc z enakimi osnovami

$$\boxed{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$ osnovo prepišemo, stopnji odštejemo

$$4^5 : 4^2 = \frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$$

3. Potenciranje potence

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$ osnovo prepišemo, stopnji pomnožimo

$$(4^2)^3 = 4^6$$

4. Potenciranje produkta

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$ osnovi pomnožimo, stopnjo prepišemo

$$4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2$$

5. Potenciranje količnika

$$\boxed{a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$ osnovi delimo, stopnjo prepišemo

$$6^3 : 2^3 = \frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$$

Računanje s koreni (poljubnih stopenj)

Definicija korena:

KVADRATNI KOREN: $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$
2. stopnje

KUBIČNI KOREN: $\sqrt[3]{x}$
3. stopnje

⋮

N-ti KOREN: $\sqrt[n]{x}$
n-te stopnje

$\sqrt{36} = 6$, ker je $6^2 = 36$

$\sqrt[3]{125} = 5$, ker je $5^3 = 125$

$\sqrt[6]{64} = 2$, ker je $2^6 = 64$

Lastnosti:

$$x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a} \; ; \; a > 0$$
$$x^3 = a \rightarrow x = \sqrt[3]{a}$$
$$\vdots$$
$$x^n = a \rightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt{a}^{\,2} = a \; ; \; \sqrt{a^2} = |a|$$
$$\sqrt[3]{a}^{\,3} = \sqrt[3]{a^3} = a$$
$$\vdots$$
$$\sqrt[n]{a}^{\,n} = a \; \left[a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a \right]$$

koren → potenca
$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$\sqrt[n]{1} = 1$, saj je $1^n = 1$

$\sqrt[n]{0} = 0$, saj je $0^n = 0$

$\sqrt[1]{a} = a$, saj je $a^1 = a$

$\sqrt[0]{a}$ NI DEFINIRANO

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$, razen če $a < 0$ in hkrati n sodo število

Pravila za računanje s koreni:

1. Množenje korenov enakih stopenj

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$$

koren prepišemo, korenjenca množimo

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$$

2. Deljenje korenov enakih stopenj

$$\boxed{\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

$$\sqrt[4]{32}:\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{16}=2$$

koren prepišemo, korenjenca delimo

3. Korenjenje korena

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}}$$

korenski
stopnji množimo,
korenjenec se prepiše

4. Razširjanje oziroma krajšanje korena

$$\boxed{\sqrt[n]{a^{m}}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}}$$

RAZŠIRJANJE: $\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[8]{x^6}=\sqrt[12]{x^9}=\dots$

stopnjo korena ter stopnjo potence
množimo z enakim naravnim številom

KRAJŠANJE:

$$\sqrt[18]{x^6}=\sqrt[18:6]{x^{6:6}}=\sqrt[3]{x}$$

stopnjo korena ter stopnjo potence
delimo z enakim naravnim številom

Funkcija in njene lastnosti

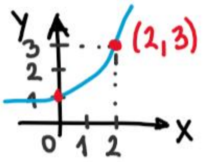
Definicija: **Funkcija** je preslikava oz. predpis, ki vsakemu elementu $x \in X$ priredi element $y \in Y$. Zapis: $f: X \to Y$

Osnovni pojmi

GRAF funkcije G_f je množica vseh točk $(x, f(x))$, ki so zajete v nekem predpisu.

$y \in Y$ je SLIKA elementa x in velja: $f(x) = y$

y je VREDNOST funkcije, ki je odvisna od spremenljivke x

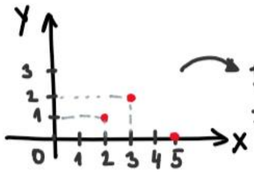


mpr. $f(2) = 3$
$f(0) = 1$

Množica $x \in X$ je DEFINICIJSKO OBMOČJE D_f

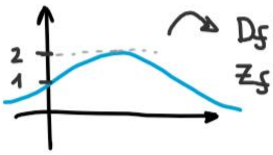
Množica vseh $y = f(x)$ je ZALOGA VREDNOSTI Z_f

①



$D_f: \{2,3,5\}$
$Z_f: \{0,1,2\}$

②



$D_f: x \in \mathbb{R}$
$Z_f: y \in (0,2]$

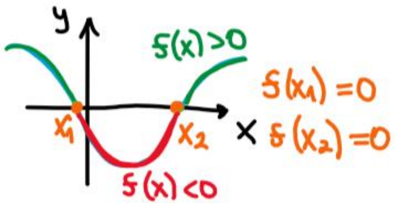
Lastnosti

I. Predznak funkcije

$f(x)$ je

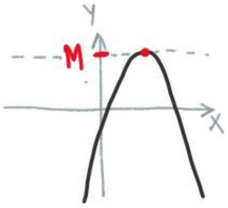
- POZITIVNA, kjer je $y = f(x) > 0$ (nad x osjo)
- NEGATIVNA, kjer je $y = f(x) < 0$ (pod x osjo)
- ENAKA NIČ, kjer je $y = f(x) = 0$ (na x osi)

Točko x, kjer je $f(x) = 0$, imenujemo NIČLA FUNKCIJE.

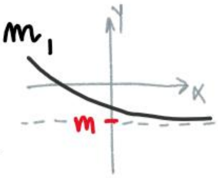


2. Omejenost in neomejenost funkcije

$f(x)$ je



- **NAVZGOR OMEJENA**, če obstaja tako število M ($M \in \mathbb{R}$) da je $f(x) \leq M$ za vse $x \in D_f$.
  Če takšnega M ni, potem je $f(x)$ navzgor neomejena.

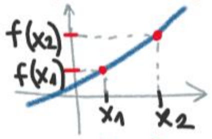


- **NAVZDOL OMEJENA**, če obstaja takšno realno število m, da je $f(x) \geq m$ za vse $x \in D_f$.
  Če takšnega m ni, potem je $f(x)$ navzdol neomejena.
- **OMEJENA**, če je navzgor in navzdol omejena

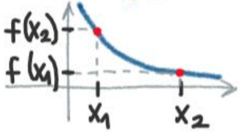
3. Naraščanje in padanje funkcije

$f(x)$ je na intervalu (a,b)

- **NARAŠČAJOČA**, če velja: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

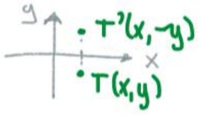


- **PADAJOČA**, če velja: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



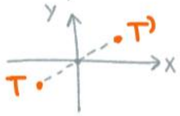
4. Zrcaljenje funkcije

- čez abscisno os: $T(x,y) \rightarrow T'(x,-y)$

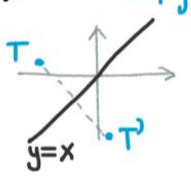


- čez ordinatno os: $T(x,y) \rightarrow T'(-x,y)$

- čez izhodišče $T(0,0)$: $T(x,y) \rightarrow T'(-x,-y)$



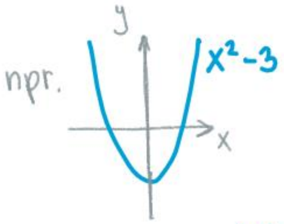
- čez simetralo lihih kvadrantov $y = x$: $T(x,y) \rightarrow T'(y,x)$



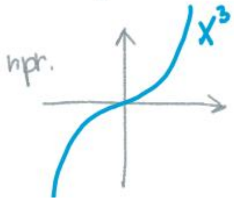
5. Sodost/lihost funkcije

$f(x)$ je:

- **SODA**, če velja: $f(x) = f(-x)$
  - → simetrična glede na y os



- **LIHA**, če velja: $f(-x) = -f(x)$
  - → simetrična glede na izhodišče



Potenčna funkcija

je funkcija v obliki potence, ki ima v osnovi spremenljivko, v eksponentu pa celo število.

Potenčne funkcije s pozitivnim eksponentom

$$\boxed{f(x) = x^n \;;\; n \in \mathbb{N}}$$

S SODIM EKSPONENTOM

npr. $f(x) = x^2$

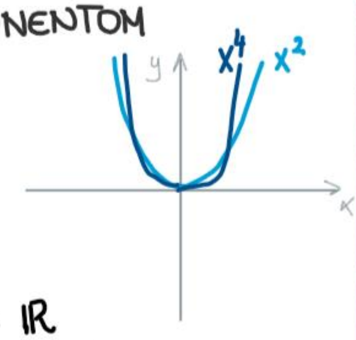
$f(x) = x^4$

$f(x) = x^6$

$\vdots$

Lastnosti: $D_f: \mathbb{R}$

$Z_f: [0, \infty)$



Z LIHIM EKSPONENTOM

npr. $f(x) = x^3$

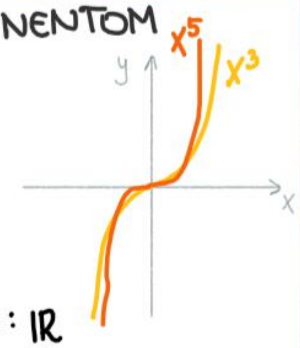
$f(x) = x^5$

$f(x) = x^7$

$\vdots$

Lastnosti: $D_f: \mathbb{R}$

$Z_f: \mathbb{R}$



Navedene lastnosti glede zaloge vrednosti veljajo le v osnovni središčni legi (brez premikov funkcije).

Potenčne funkcije z negativnim eksponentom

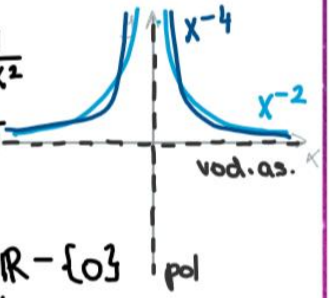
$$f(x) = x^{-n}\ ;\ n \in \mathbb{N}$$

S SODIM EKSPONENTOM

npr. $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

⋮



Lastnosti: $D_f: \mathbb{R} - \{0\}$

$Z_f: (0, \infty)$

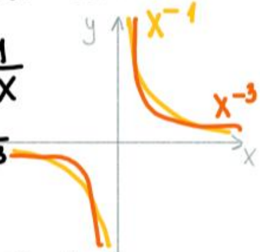
pol: $x = 0$ vodoravna asimptota: $y = 0$

Z LIHIM EKSPONENTOM

npr. $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

⋮



Lastnosti: $D_f: \mathbb{R} - \{0\}$

$Z_f: \mathbb{R} - \{0\}$

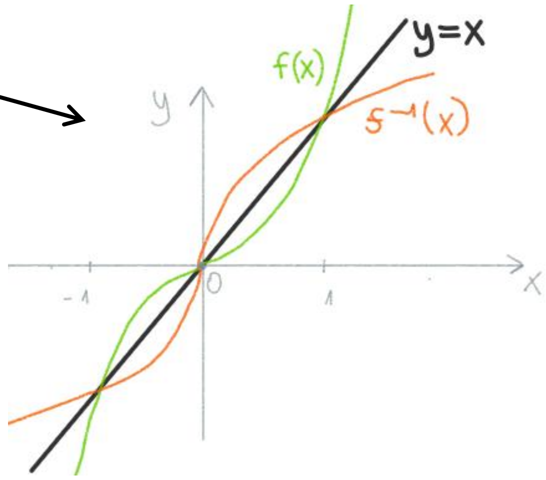
pol: $x = 0$ vodoravna asimptota: $y = 0$

Navedene lastnosti glede definicijskega območja, zaloge vrednosti, pola in vodoravne simptote veljajo le v osnovni središčni legi (brez premikov funkcije).

Premiki in raztegi funkcij – glej snov Eksponentna funkcija (stran 31)

Inverzna funkcija

- Je funkcija, ki deluje obratno kot dana funkcija f
- Inverzno funkcijo označimo z f^{-1}
- graf inverzne funkcije $f^{-1}(x)$ dobimo kot **zrcaljenje funkcije $f(x)$ čez simetralo lihih kvadrantov $y = x$** (zamenjava koordinat x in y)



Izračun inverzne funkcije

1.) V enačbi zamenjamo vlogi y in x:

PRIMER:

$$f(x) = 3x-5$$
$$y = 3x-5$$
$$x = 3y-5$$

2.) Izrazimo y iz enačbe in dobimo predpis inverzne funkcije:

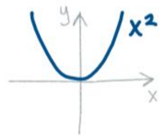
$$x+5 = 3y$$
$$3y = x+5 \quad /:3$$
$$y = \frac{x+5}{3}$$
$$\rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}}$$

Če izračunamo kompozitum funkcije f in njenega inverza dobimo identično funkcijo $g(x) = x$

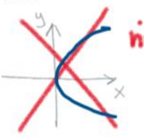
$$\underbrace{(f\circ f^{-1})}_{g}(x) = f(f^{-1}(x)) = x = \mathrm{id}$$
$$\underbrace{(f^{-1}\circ f)}_{g}(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{id}$$

Če dana funkcija ni bijektivna (npr. kvadratna f.), potem njen inverz ne obstaja. V tem primeru obstaja samo delni inverz, saj moramo skrčiti definicijsko območje (in včasih zalogo vrednosti) dani funkciji f, da bi inverz lahko obstajal:

$f(x) = x^2$ NI bijektivna

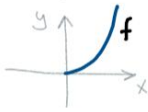


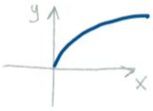
$D_f: \mathbb{R}$
$Z_f: [0,\infty)$



ni graf

omejimo D_f na pozitivna $\mathbb{R}^+$:





$f^{-1} = \sqrt{x}$

Izračun:

$$f(x) = x^2$$
$$y = x^2$$
$$x = y^2$$
$$y = \pm\sqrt{x} \text{ (ni graf)}$$

samo + upoštevamo

$$\underline{y = \sqrt{x}} \text{ (je graf)}$$
$$\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{x}} \quad \text{KORENSKA FUNKCIJA}$$

Kvadratna funkcija

Graf kvadratne funkcije je PARABOLA. Predpis funkcije:

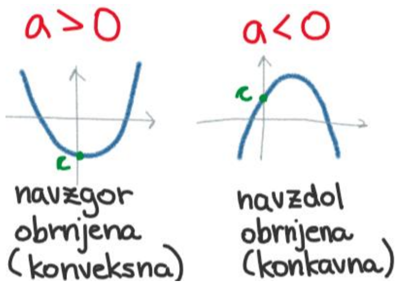
$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0)$

a, b, c ... koeficienti

a ... vodilni koeficient

b ... linearni koeficient

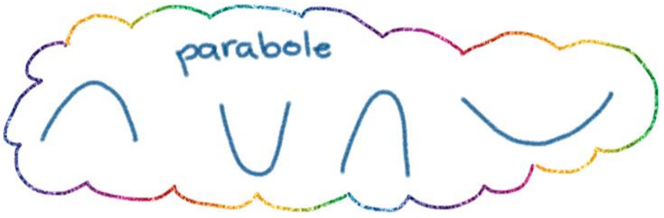
c ... prosti člen (odsek na y osi, začetna vrednost)



če je $c = 0$, gredo skozi izhodišče

npr. $f(x) = ax^2$

$f(x) = ax^2 + bx$



Ničle, začetna vrednost in teme funkcije:

Začetna vrednost je točka, v kateri graf seka ordinatno (y) os. Enaka je prostemu členu c. Izračunamo jo tako, da x enačimo z 0: $f(0) = c$

Ničle so točke, kjer graf funkcije seka abscisno (x) os. Izračunamo jih tako, da y oziroma **f(x) enačimo z 0**:

$$\boxed{f(x) = 0}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ rešimo kvadratno enačbo

Ali ima kvadratna funkcija ničle ali ne, je odvisno od njenega predpisa in oblike. Od tega je odvisna vrednost **diskriminante D**:

diskriminanta: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

rešitve kvadratne enačbe: $\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

Funkcija f(x):

- lahko seka abscisno os v dveh točkah (**dve ničli**), kar pomeni, da ima **kvadratna enačba dve različni rešitvi:**

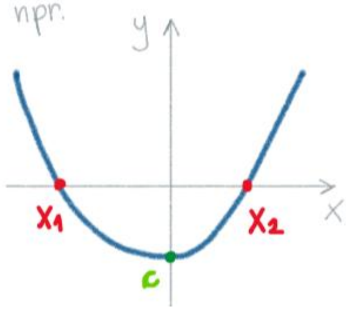
$D > 0$

$b^2 - 4ac > 0$

dve ničli

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$x_1 \neq x_2$



- se lahko samo dotika x osi v eni točki, kar pomeni, da ima **kvadratna enačba eno (dvakratno) rešitev** (**ena dvojna ničla**)

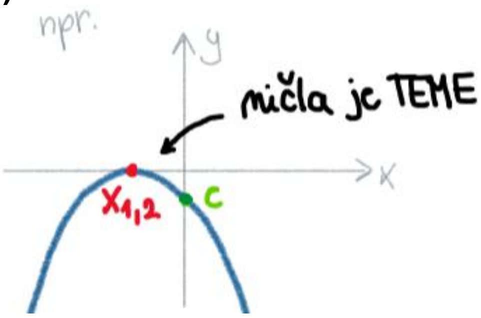
$D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

ena ničla

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

$x_1 = x_2$

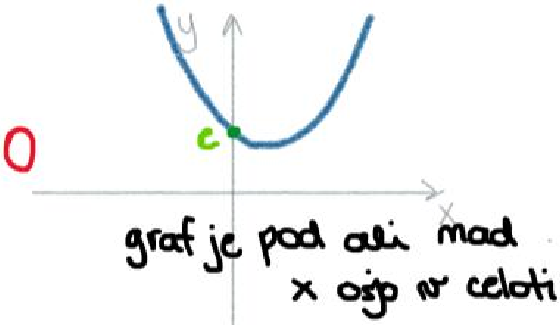


- je lahko popolnoma nad ali pod x osjo, torej nima stika z abscisno osjo, kar pomeni, da **kvadratna enačba nima nobene realne rešitve** (**nima ničel**):

$D < 0$

$b^2 - 4ac < 0$

ni ničel



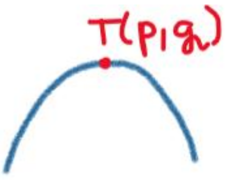
graf je pod ali nad x osjo v celoti

Teme $T(p, q)$ je točka, v kateri ima graf funkcije največjo ali najmanjšo vrednost (odvisno od tega, kako je graf obrnjen). V tej točki se graf obrne:

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad q = -\frac{D}{4a} \qquad D = b^2 - 4ac$$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(abscisa temena je aritmetična sredina ničel)



Oblike predpisa funkcije:

I. SPLOŠNA OBLIKA

Glej osnovni predpis funkcije.

2. TEMENSKA OBLIKA

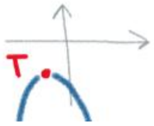
$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$T(p, q)$... teme funkcije

npr. $f(x) = -(x+2)^2 - 4$

$a = -1$ $p = -2$ $q = -4$

teme: $T(-2, -4)$



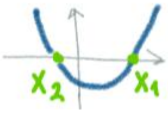
3. NIČELNA (RAZCEPNA) OBLIKA

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

x_1, x_2 ... ničli funkcije

npr. $f(x) = 2(x-3)(x+1)$

$a = 2$ $x_1 = 3$ $x_2 = -1$



Veljata tudi Vietovi formuli:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Kvadratna enačba in neenačba:

Enačbo običajno rešujemo, ko moramo izračunati ničle funkcije ali presečišče med dvema funkcijama. Kako jo vse rešujemo?

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

→ s formulo: $D = b^2 - 4ac$ in $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

↓ v vseh primerih

→ s pomočjo razstavljanja: Viétovo pravilo

↓ vendar ne gre v vseh primerih

npr.
$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$
$$2(x^2 - 3x + 2) = 0$$
$$2(x-2)(x-1) = 0$$
$$x_1 = 2 \quad x_2 = 1$$

VIÉTOVO PRAVILO

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$(x + x_1)(x + x_2) = 0$$

→ tako da izpostavimo x (samo v primerih, ko je $c=0$)

npr. $3x^2 + x = 0$

$x(3x+1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$

→ tako, da izrazimo x (samo v primerih, ko je $b=0$)

npr. $x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \qquad x_1 = -\sqrt{3} \qquad x_2 = \sqrt{3}$

Neenačbo rešujemo, ko moramo ugotoviti, kdaj je graf pozitiven oziroma negativen. Rešujemo pa jo tako, da najprej rešimo samo enačbo, narišemo skico in rešitve neenačbe preberemo iz slike.

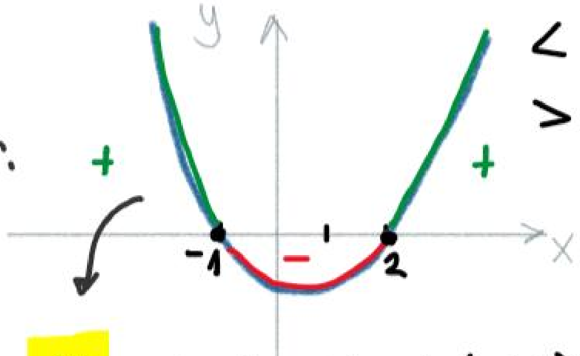
oblike: $ax^2 + bx + c \geq 0$ nad osjo x + ničle

≤ 0 pod osjo x + ničle

< 0 strogo pod osjo x

> 0 strogo nad osjo x

npr.



< 0 pod osjo x: $x \in (-1, 2)$

≤ 0 pod osjo x + ničle: $x \in [-1, 2]$

> 0 nad osjo x: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

≥ 0 nad osjo x + ničle: $x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

funkcija je POZITIVNA, kjer je nad osjo x

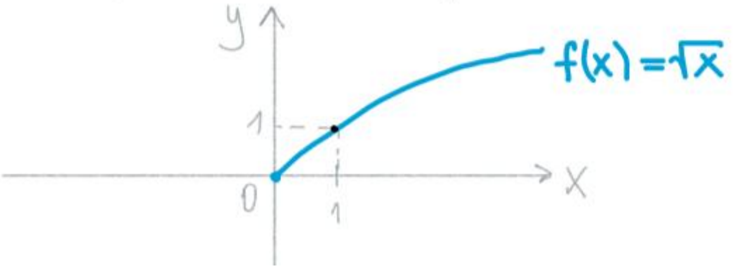
funkcija je NEGATIVNA, kjer je pod osjo x

Korenska funkcija

Osnovna oblika predpisa funkcije:

$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$; pogoj: $x \geq 0$

- je delni inverz kvadratne funkcije
- D_f: $x \geq 0$ (definicijsko območje → pod korenom ≥ 0)
- Z_f: $y \in [0, \infty)$



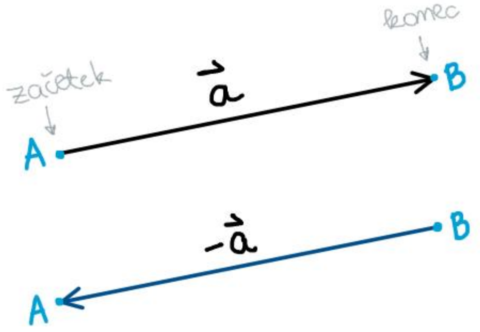
Ravnina in prostor

Vsi zapiski tega poglavja se nahajajo v ločenih zapiskih pod imenom: ***Geometrija v ravnini in prostoru***.

Vektorji

Definicija, lastnosti in osnovni pojmi

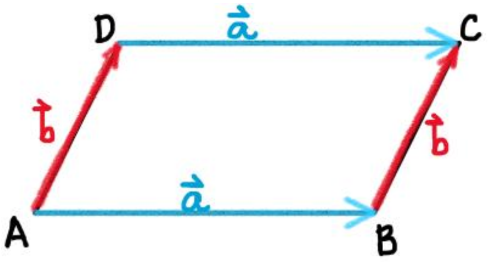
Vektor je usmerjena daljica.
Ima **dolžino, smer** (naklon) in **usmerjenost** (kam kaže puščica).



$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ← končna točka
začetna točka

$-\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Če imata dva vektorja enake vse tri zgoraj naštete lastnosti, pravimo da sta vektorja enaka (in ju lahko tudi označimo enako).
Npr. v paralelogramu imamo dva para enakih vektorjev:



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Nasprotni vektor vektorja $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$, saj ima enako dolžino in smer, vendar nasprotno usmerjenost.

Oznaka za dolžino vektorja $\vec{a}$: a, $|\vec{a}|$, $|AB|$

Enotski vektor je vektor, ki ima dolžino enako ena: $|\vec{a}| = 1$

Enotski vektor dobimo, kadar poljuben vektor delimo z njegovo dolžino.

Ničelni vektor je vektor dolžine nič: $|\overrightarrow{AA}| = 0$ •A

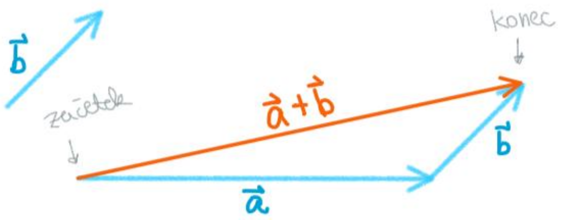
Vektor je **EKVIVALENČNA RELACIJA**:

- refleksivnost: $\vec{a} = \vec{a}$
- simetričnost: $(\vec{a} = \vec{b}) \rightarrow (\vec{b} = \vec{a})$
- tranzitivnost: $(\vec{a} = \vec{b}$ in $\vec{b} = \vec{c}) \rightarrow (\vec{a} = \vec{c})$

Operacije pri vektorjih

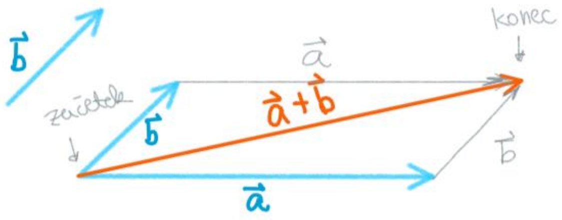
Vsota/razlika vektorjev

1.) vsota : $\vec{a}+\vec{b}$:



TRIKOTNIŠKO PRAVILO

- enega od vektorjev vzporedno premaknemo, da ima začetek, kjer se drugi vektor konča
- $\vec{a}+\vec{b}$ je vektor, ki skupaj z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ tvori sklenjen lik (gre od začetka do konca, kjer je puščica)

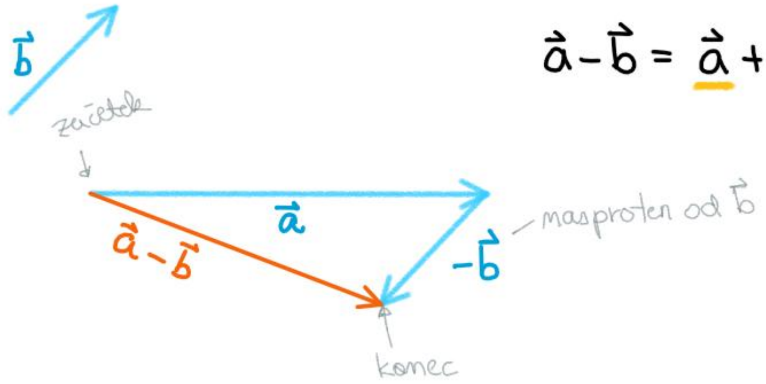


PARALELOGRAMSKO PRAVILO

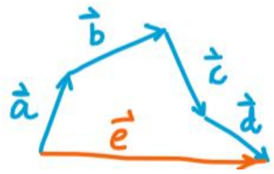
- en vektor vzporedno premaknemo, da imata $\vec{a}$ in $\vec{b}$ skupno izhodišče
- dopolnimo sliko do paralelograma
- $\vec{a}+\vec{b}$ je diagonala, začetek ima v skupnem izhodišču

2.) razlika $\vec{a}-\vec{b}$:

$$\vec{a}-\vec{b} = \underline{\vec{a}} + (\underline{-\vec{b}})$$ (glej vsota vektorjev)



3.) če imamo več vektorjev, npr. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$:



$$\vec{e} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$

LASTNOSTI VSOTE:

$\vec{a}+\overset{\uparrow}{0}=\vec{a}$ nevtralni element

$\vec{a}+(\overset{\nwarrow}{-\vec{a}})=0$ nasprotni element

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ KOMUTATIVNOST

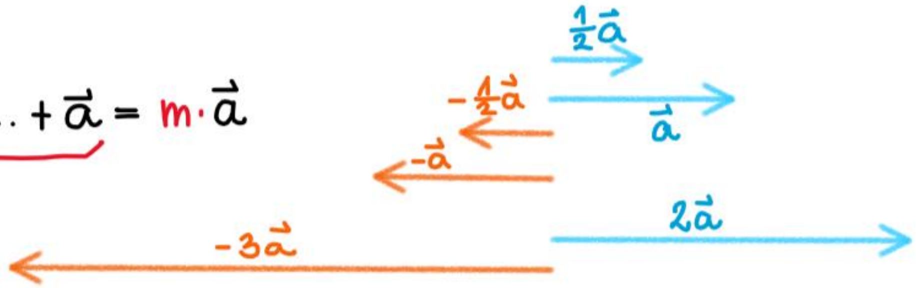
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ASOCIATIVNOST

Produkt vektorja s skalarjem

To je, kadar vektor pomnožimo s številom.

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\cdot\vec{a}$$

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{m \text{ členov}} = m\cdot\vec{a}$$



Velja:

$1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

$0\cdot\vec{a} = 0$

$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$

LASTNOSTI PRODUKTA S SKALARJEM

$m\cdot(n\cdot\vec{a}) = (m\cdot n)\cdot\vec{a}$ $\quad 3\cdot(4\vec{a}) = 12\vec{a}$

$(m+n)\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{a} + n\cdot\vec{a}$ $\quad (3+4)\cdot\vec{a} = 3\vec{a} + 4\vec{a}$

$m\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = m\cdot\vec{a} + m\cdot\vec{b}$ $\quad 3\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$

Linearna kombinacija, linearna odvisnost in neodvisnost vektorjev

Linearna kombinacija dveh vektorjev: $\boxed{m\cdot\vec{a} + n\cdot\vec{b}}$

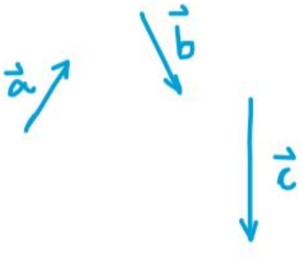
Linearna kombinacija treh vektorjev: $\boxed{m\cdot\vec{a} + n\cdot\vec{b} + p\cdot\vec{c}}$

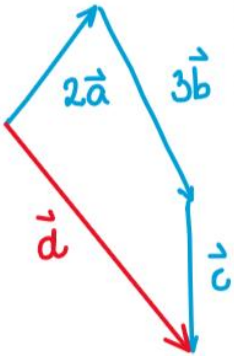
Linearna kombinacija za poljubno število vektorjev:

$\boxed{k_1\cdot\vec{a_1} + k_2\cdot\vec{a_2} + \dots + k_n\cdot\vec{a_n}}$ (če imamo n vektorjev v splošnem)

kjer so $k_1, k_2, \dots, k_n$ SKALARJI

ZGLED: npr. $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$





pravimo, da je vektor $\vec{d}$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$

torej lahko $\vec{d}$ izrazimo z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **linearno odvisna**, če velja:

$$\boxed{m\vec{a}+n\vec{b}=0}$$

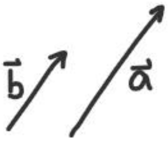
$$\downarrow$$

$$\vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}$$

$m,n \neq 0$ m,n skalarja

- sta kolinearna
- sta vzporedna
- enega lahko izrazimo z drugim

npr. $\vec{a}=2\cdot\vec{b}$



Torej, če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ **kolinearna** (vzporedna), velja nasplošno:

$$\vec{a}=k\cdot\vec{b} \qquad \vec{b}=\ell\cdot\vec{a}$$

$k,\ell\in\mathbb{R}$

Trije vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so **linearno odvisni,** če ležijo v isti ravnini, torej velja:

$$\boxed{m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0}$$

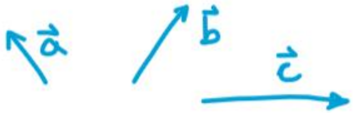
$$\downarrow$$

$$\vec{c}=-\frac{m}{p}\vec{a}-\frac{n}{p}\vec{b}$$

$m,n,p \neq 0$

m,n,p skalarji

- so komplanarni
- enega lahko izrazimo z drugima dvema
- noben par ni vzporeden



Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **linearno neodvisna**, kadar nista vzporedna:

enega ne moremo izraziti z drugim

iz $m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}=0$ sledi $m=n=0$

določata ravnino (BAZNA VEKTORJA ravnine), torej lahko vsak vektor iz ravnine izrazimo z njima

↳ $\vec{c}=k_1\cdot\vec{a}+k_2\cdot\vec{b}$

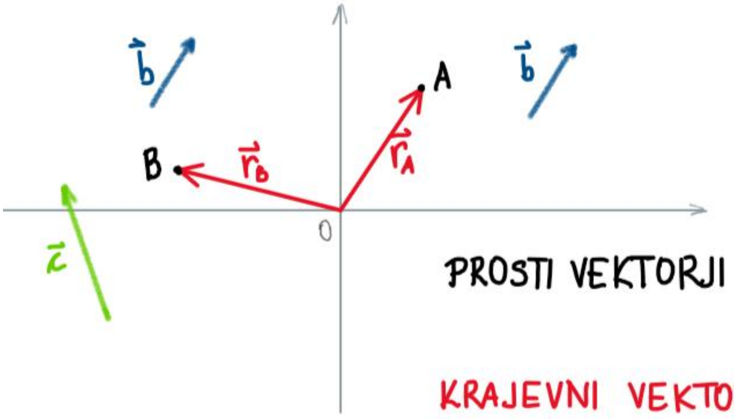
Vektorji so **linearno neodvisni** takrat, ko velja:

$$\boxed{k_1\cdot\vec{a_1}+k_2\cdot\vec{a_2}+\dots+k_n\cdot\vec{a_n}=0 \Rightarrow \overset{\text{vsi koeficienti }=0}{k_1=k_2=\dots=k_n=0}}$$

Vektorji so **linearno odvisni** takrat, ko velja:

$$\boxed{k_1\cdot\vec{a_1}+k_2\cdot\vec{a_2}+\dots+k_n\cdot\vec{a_n}=0 \text{ in vsaj en od koeficientov} \neq 0}$$

Vektorji v koordinatnem sistemu

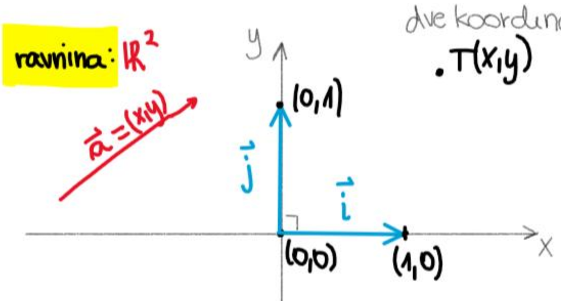


PROSTI VEKTORJI: so kjerkoli v ravnini (prostoru)

KRAJEVNI VEKTORJI: imajo začetek v izhodišču, ime dobijo po končni točki (npr. $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \ldots$)

ravnina: $\mathbb{R}^2$

dve koordinati $\cdot T(x,y)$

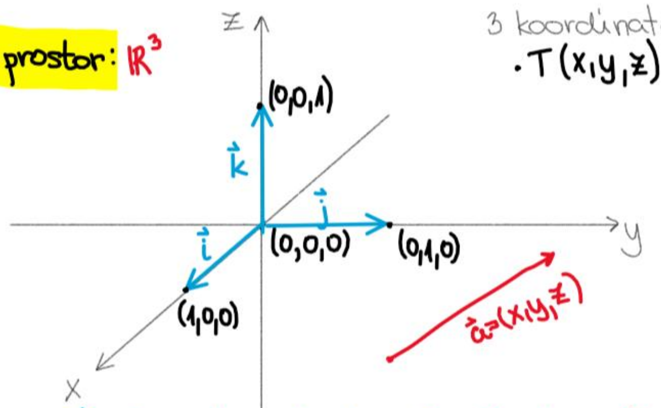


$\vec{i}=(1,0)$

$\vec{j}=(0,1)$ ← $\vec{i}$ in $\vec{j}$ tvorita BAZO RAVNINE

prostor: $\mathbb{R}^3$

3 koordinate $\cdot T(x,y,z)$



$\vec{i}=(1,0,0)$ $\quad\vec{j}=(0,1,0)$ $\quad\vec{k}=(0,0,1)$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tvorijo BAZO PROSTORA

Vektorji $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$

- so krajevni vektorji, saj imajo začetek v koordinatnem izhodišču
- so **paroma pravokotni** vektorji, torej: $\vec{i}\cdot\vec{j}=0 \quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0 \quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0$
- imajo dolžino 1, torej so **enotski vektorji**: $|\vec{i}|=1, \quad |\vec{j}|=1, \quad |\vec{k}|=1$
- so linearno neodvisni, določajo bazo ravnine (prostora), ki jo imenujemo **ORTONORMIRANA BAZA** (ime je dobila zaradi medsebojne pravokotnosti in dolžine 1).
- vsak vektor v prostoru lahko izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$:

če je $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, potem je $\vec{a}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}$

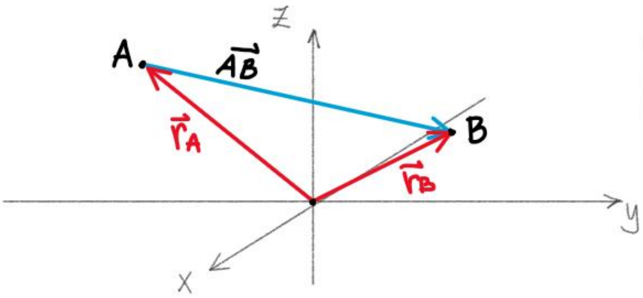
npr. $\vec{a}=(-2,3,5)=-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

Vsakemu vektorju v prostoru lahko določimo njegove koordinate, če poznamo njegovo začetno in končno točko:

Naj bo:

$A(a_1, a_2, a_3)$

$B(b_1, b_2, b_3)$



npr. $A(2,-5,3)$

$\Rightarrow \vec{r}_A = (2,-5,3)$

→

$\vec{r}_A = (a_1, a_2, a_3)$ ... krajevni vektor točke A

$\vec{r}_B = (b_1, b_2, b_3)$ ... krajevni vektor točke B

} imata enake koordinate kot njuna končna točka

Potem velja:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3)\\ \vec{BA} &= \vec{r}_A - \vec{r}_B = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3)\end{aligned}}$$

končna − začetna

Vsota/razlika vektorjev v komponentah:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3)}$$

seštevamo po komponentah

npr. $\vec{a} = (2,-1,0)$ $\quad \vec{a}+\vec{b} = (5,4,4)$

$\vec{b} = (3,5,-4)$ $\quad \vec{a}-\vec{b} = (-1,-6,4)$

Produkt vektorja s skalarjem v komponentah:

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = m \cdot (a_1, a_2, a_3) = (m a_1, m a_2, m a_3)}$$

skalar pomnožimo z vsako od komponent

npr. $\vec{a} = (3,2,-1)$

$3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot (3,2,-1) = (9,6,-3)$

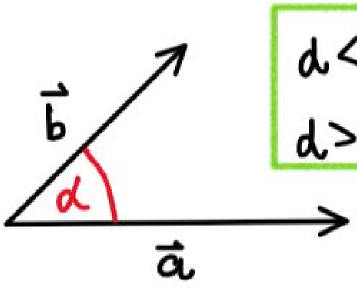
Dolžina vektorja:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)}$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}$$

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha}$$



$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha < 90^\circ \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \\ \alpha > 90^\circ \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} < 0\end{array}}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} \in \mathbb{R}$

↑ skalarni produkt vektorjev NI vektor!

Velja:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

$$\boxed{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}$$

Skalarni produkt, kadar imamo podane komponente:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \in \mathbb{R}}$$

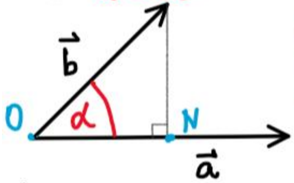
Lastnosti skalarnega produkta:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ komutativnost
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$
4. $\vec{a}(m\cdot\vec{b}) = m\cdot(\vec{a}\vec{b}) = (m\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$; $m \in \mathbb{R}$

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$:

- Vektorja postavimo v skupni začetek O
- Vektor $\vec{a}$ podaljšamo v nosilko (če je potrebno)
- Iz krajišča vektorja $\vec{b}$ narišemo pravokotnico na nosilko vektorja $\vec{a}$
- Nožišče pravokotnice je točka N, daljica **|ON|** pa je pravokotna projekcija

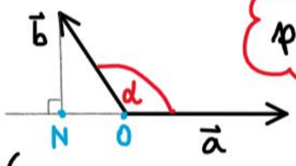
I. $\alpha < 90°$



$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = |ON|$$

↳ če je α OSTRI KOT, je projekcija POZITIVNA

II. $90° < \alpha < 180°$



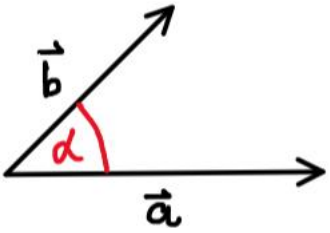
$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = -|ON|$$

↳ če je α TOPI KOT, je projekcija NEGATIVNA

$$\boxed{\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} &= |\vec{b}|\cdot\cos\alpha \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{a}\cdot\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} \end{aligned}}$$

Kot med vektorjema α:

- Vektorja premaknemo v skupni začetek in kot med krakoma je kot med vektorjema. Izračun kota:



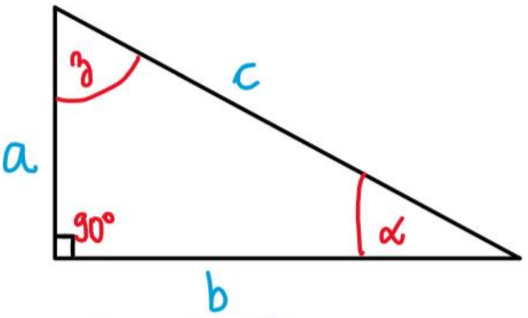
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

- Med kolinearnima (vzporednima) vektorjema, ki sta enako usmerjena, je kot 0°
- Med vzporednima vektorjema, ki sta nasprotno umerjena, je kot 180°
- Kadar vektorja oklepata kot 90°, sta pravokotna (ortogonalna)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\underbrace{\cos 90°}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$$

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku



a, b… kateti

c… hipotenuza

Velja: $\boxed{\alpha+\beta=90°}$

α in β sta KOMPLEMENTARNA kota

- a je nasprotna kateta kotu α, vendar priležna kotu β
- b je nasprotna kotu β, vendar priležna kotu α

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \sin\beta=\frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{priležna kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \cos\beta=\frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} \qquad \tan\beta=\frac{b}{a}$$

$$\cot\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{priležna kateta}}{\text{nasprotna kateta}} \qquad \cot\beta=\frac{a}{b}$$

Velja tudi:

$$\sin\alpha=\cos\beta \qquad \tan\alpha=\cot\beta$$

$$\sin\beta=\cos\alpha \qquad \tan\beta=\cot\alpha$$

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

Kompleksna števila

Definicija in ponazoritev kompleksnih števil

Ker je izraz $a^2 + b^2$ nerazcepen v realnih številih, razširimo realna števila na novo množico kompleksnih števil $\mathbb{C}$.

PRIMER: $x^2 + 1 = 0$ ta enačba ni razcepna v realnih številih

$$x^2 = -1 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{array}\right\}$$ dobimo dve KOMPLEKSNI rešitvi

Število $\sqrt{-1}$ imenujemo IMAGINARNA ENOTA i.

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

$$\sqrt{-4} = 2i$$
$$\sqrt{-9} = 3i$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$$

Kompleksno število običajno označimo s črko z (ali w, ipd.) in ga zapišemo kot:

$$\boxed{z = a + b \cdot i} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a = realni del kompleksnega števila → $a = \mathrm{Re}(z)$

b = imaginarni del → $b = \mathrm{Im}(z)$

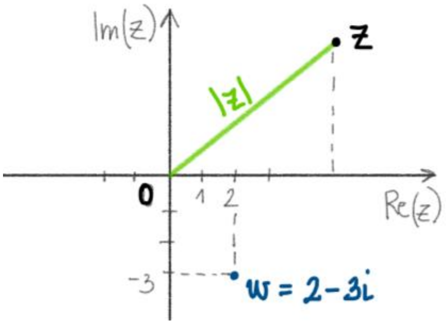
npr. $z = 3 - 2i$

$$\mathrm{Re}(z) = 3 \qquad \mathrm{Im}(z) = -2$$

Velja:

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4k+1} = i \qquad \rightarrow i^{13} = i$$
$$i^{4k+2} = i^2 = -1 \qquad \rightarrow i^{22} = i^2 = -1$$
$$i^{4k+3} = i^3 = -i \qquad \rightarrow i^{47} = -i$$
$$i^{4k} = 1 \qquad \rightarrow i^{60} = 1$$

Ponazoritev kompleksnega števila v ravnini:

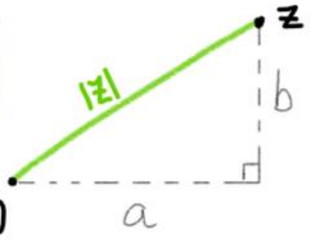


Število $z = a+bi$ ponazorimo s točko $T(a,b)$

X os je realna os, y os je imaginarna os

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je oddaljenost števila z od koordinatnega izhodišča:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$



← Pitagorov izrek

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

npr. $z = 3-4i$

$$|z| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16}$$

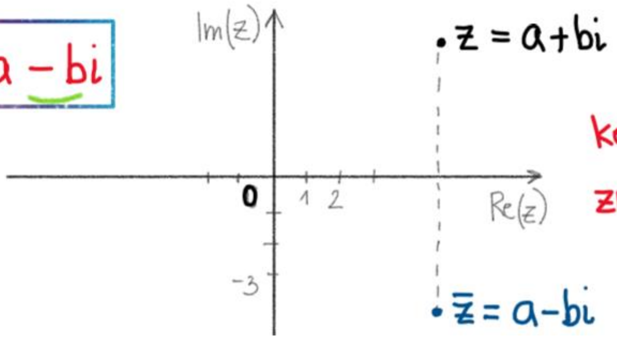
$$|z| = \sqrt{25} = 5$$

Lastnosti absolutne vrednosti:

1. $|z| \geq 0$
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$ trikotniška neenakost
4. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

Konjugirana vrednost kompleksnega števila z je število $\bar{z}$, ki ima ima enak realni del, a imaginarni del spremeni predznak:

$$\boxed{\bar{z} = a \underline{-b}i}$$



konjugiranje je kot zrcaljenje čez X os

Lastnosti konjugirane vrednosti:

1. $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$
2. $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z=\overline{z}$, samo če je z realno število $(b=0)$

Pravila za računanje s kompleksnimi števili

1. Seštevanje / odštevanje:

$$z \pm w = (\underline{a}+\underline{bi}) \pm (\underline{c}+\underline{di}) = \underline{a\pm c} + (\underline{b\pm d})i$$

npr. $(\underline{3}-\underline{4i}) + (\underline{-2}+\underline{6i}) = \underline{1} + \underline{2i}$

2. Množenje:

$$z\cdot w = (a+bi)\cdot(c+di) = \underline{ac-bd} + (\underline{ad+bc})i$$

npr. $(3-4i)\cdot(-2+6i) = -2 \overset{+24}{-24i^2} + 18i + 8i$

$= \underline{22} + \underline{26i}$

spomnimo se

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

3. Deljenje: $z : w = (a+bi):(c+di) = \frac{a+bi}{c+di}$

$$= \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{\underbrace{(c+di)\cdot(c-di)}_{w\cdot\overline{w}}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

v imenovalcu želimo odpraviti imaginarni del, zato ulomek razširimo s konjugirano vrednostjo od imenovalca

npr. $\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-6-3i-4i}{1+4} = \frac{-4-7i}{5} = \underline{-\frac{4}{5}} \underline{-\frac{7}{5}}i$

4. Nasprotna vrednost števila $z=a+bi$ je $-z$:

$$-z = -(a+bi) = -a-bi$$

5. Kvadrat števila z: $z^2 = (a+bi)^2 = \underline{a^2-b^2} + \underline{2abi}$

6. Produkt števila z in njegove konjugirane vrednosti:

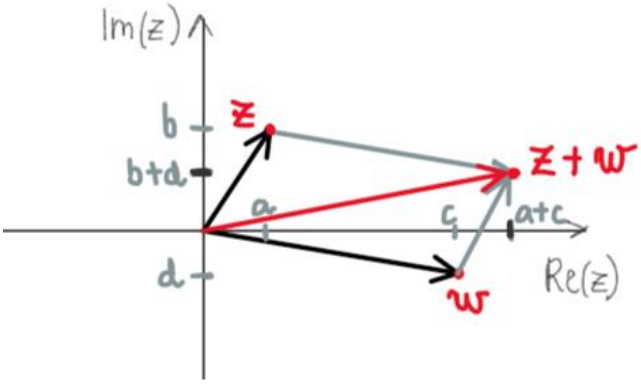
$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = \underbrace{a^2+b^2}_{\text{je realno število}} \in \mathbb{R}$$

Velja: $z\cdot\bar{z} = |z|^2 \rightarrow |z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Enakost kompleksnih števil

$\underline{a} + \underline{bi} = \underline{c} + \underline{di}$ natanko tedaj, ko $\boxed{a=c}$ in $\boxed{b=d}$

Seštevanje kompleksnih števil v ravnini je enako kot seštevanje vektorjev:



narišemo s pomočjo paralelogramskega pravila (glej VEKTORJI)

Eksponentna funkcija

Definicija in lastnosti:

Je funkcija, ki ima spremenljivko x v eksponentu, osnova pa je pozitivno realno število. Predpis funkcije:

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

$a \neq 0$

$a > 0$

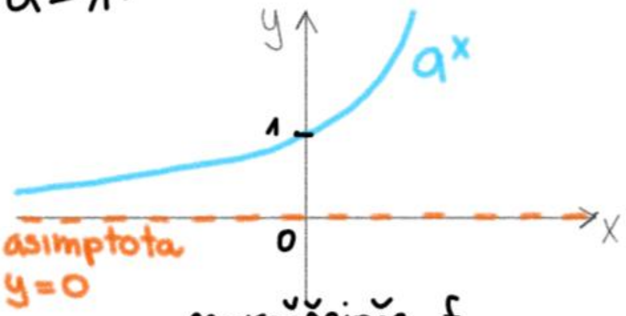
npr. $a=2: f(x) = 2^x$

$a=\frac{1}{3}: g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$

Spomnimo se

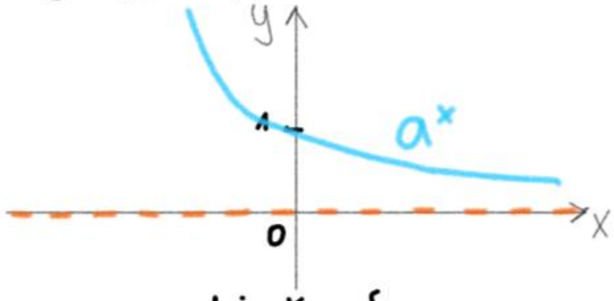
$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

$a>1:$



naraščajoča f.

$0<a<1:$



padajoča f.

Lastnosti grafa $y = a^x$:

$f(0) = 1$

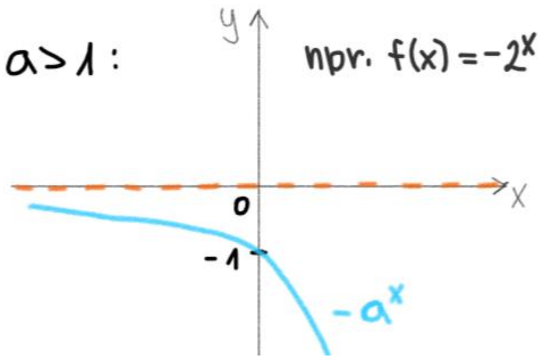
Definicijsko območje : $D_f : \mathbb{R}$

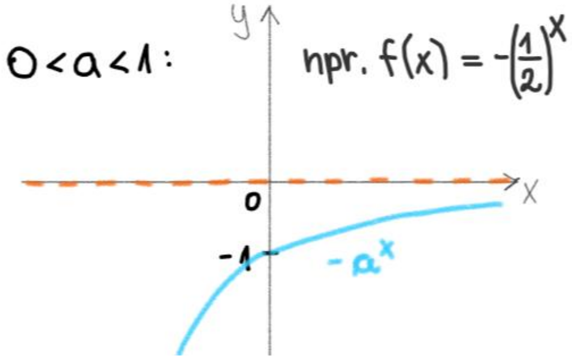
Zaloga vrednosti : $Z_f : (0, \infty)$

Vodoravna asimptota : $y = 0$

Transformacije funkcije glede na x in y os:

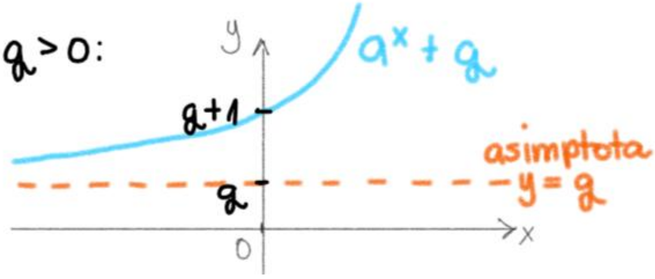
- zrcaljenje čez x os: $f(x) = -a^x$

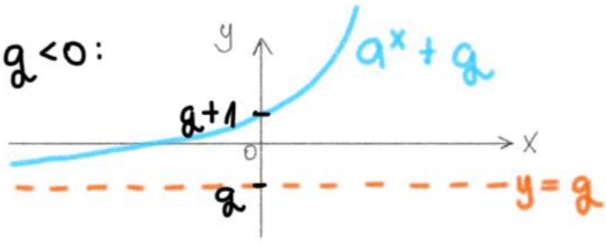

$a > 1$:
npr. $f(x) = -2^x$


$0 < a < 1$:
npr. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

- premik funkcije glede na y os: $f(x) = a^x + q$

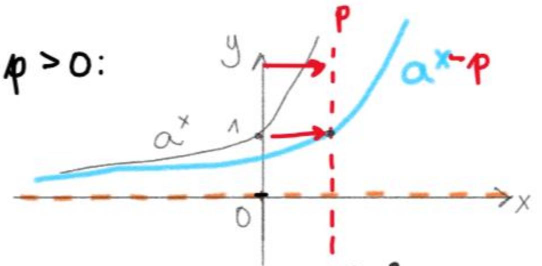
graf se premakne za q navpično gor/dol


$q > 0$:


$q < 0$:

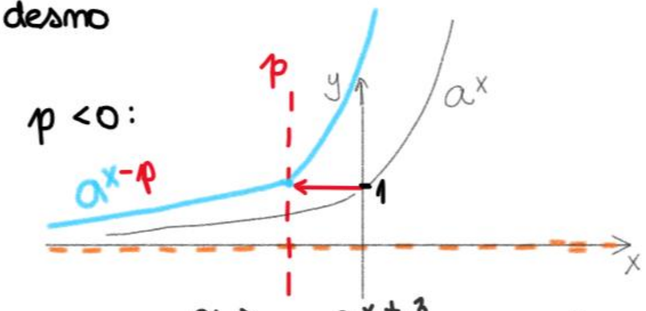
- premik funkcije glede na x os: $f(x) = a^{x-p}$

graf se premakne za p v levo/desno


$p > 0$:

npr. $f(x) = 2^{x-3}$ $p=3$

premik v desno


$p < 0$:

npr. $f(x) = 2^{x+3}$ $p=-3$

premik v levo

Eksponentna enačba:

Poznamo več tipov eksponentnih enačb. Obravnavamo tri tipe enačb.

I. enaki osnovi, različna eksponenta

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

↓ enačimo le eksponente

$$f(x) = g(x)$$

↓ rešimo enačbo

⋮

PRIMER:

$$2^{x+3} = 4^{x-1}$$

$$2^{\boxed{x+3}} = 2^{\boxed{2(x-1)}}$$

$$x+3 = 2\cdot(x-1)$$

⋮

$$\underline{x = 5}$$

II. različni osnovi, enaka eksponenta

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \quad ; \; a \neq b$$

rešitev, ko je $f(x) = 0$, saj $a^0 = b^0$

↓

eksponent enačimo z nič in rešimo enačbo

PRIMER:

$$2^{x+3} = 3^{2x+6}$$

$$2^{x+3} = (3^2)^{x+3}$$

$$2^{\boxed{x+3}} = 9^{\boxed{x+3}}$$

$$x+3 = 0$$

$$\underline{x = -3}$$

III. različni osnovi, različna eksponenta

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad /\log$$

→ ko ne moremo preoblikovati enačbe v I. ali II. tip, moramo enačbo rešiti z logaritmiranjem

$$\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$$

$$f(x)\cdot\log a = g(x)\cdot\log b$$

→ logaritemsko osnovo vzamemo po želji npr. $\log_2$, $\log$, $\ln$, $\log_3$, …

⋮

↓ rešimo enačbo

Pravila za računanje s potencami: glej 'Potence' na začetku zapiskov

Logaritemska funkcija

Definicija in lastnosti:

Je funkcija, kjer spremenljivka x nastopa kot logaritmand. Predpis funkcije:

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

$a \neq 0$

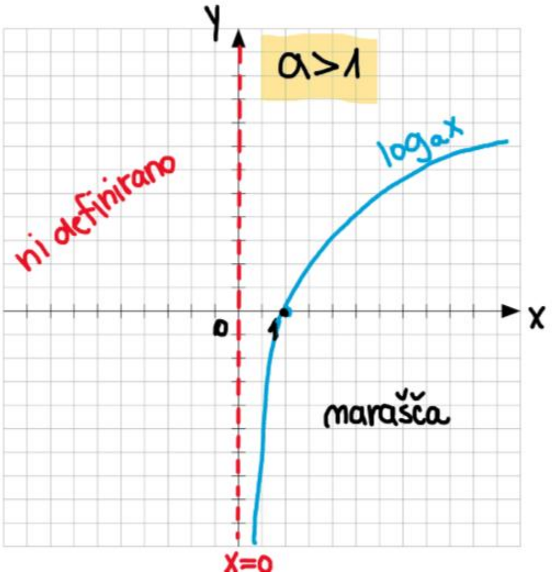
$a > 0$

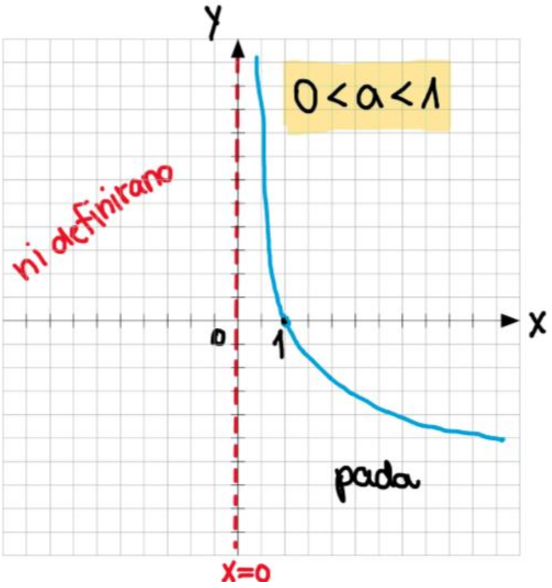
$D_f: x > 0$

$Z_f: \mathbb{R}$

navpična asimptota: $x = 0$

ničla: $x = 1$





Logaritemska funkcija je inverzna eksponentni funkciji. Zato so osnovne lastnosti ravno obratno kot pri eksponentni.

Računanje inverza eksponentne f.:

$f(x) = a^x$

$y = a^x$) zamenjava x in y

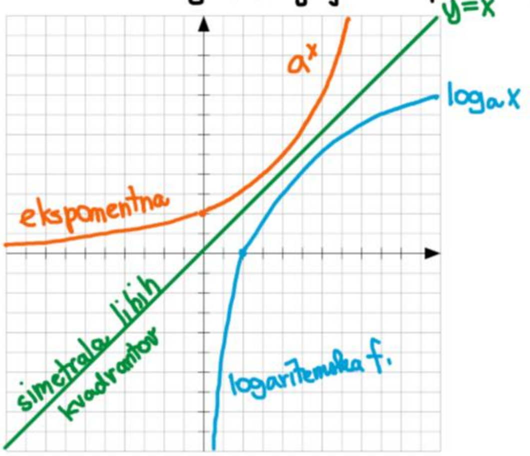
$x = a^y$ $/\log_a$ izrazimo y

$\log_a x = \log_a a^y$

$\log_a x = y$

$f^{-1}(x) = \log_a x$ dobimo logaritemsko f.

Inverzni funkciji (zrcaljenje čez premico y=x)



Definicija logaritma: $\underset{\text{vrednost logaritma}}{y} = \log_{\underset{\text{osnova}}{a}} \overset{\text{logaritmand}}{x} \Leftrightarrow a^y = x$

Lastnosti:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $a^{\log_a x} = x$
4. DESETIŠKI logaritem: $\log_{10} x = \log x$ ima osnovo 10
5. NARAVNI logaritem: $\log_e x = \ln x$ ima osnovo e

Pravila za računanje z logaritmi:

1. **Logaritem produkta** je vsota logaritmov z enakimi osnovami

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

2. **Logaritem količnika** je razlika logaritmov z enakimi osnovami

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

3. **Logaritem potence** (eksponent gre naprej in se množi z logaritmom)

$$\boxed{\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x}$$

Prehod logaritma na novo osnovo:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Kadar želimo osnovo a spremeniti v osnovo b

Geometrijski liki in telesa

Vsi zapiski tega poglavja se nahajajo v ločenih zapiskih pod imenom: ***Geometrijski liki in telesa***.

Zapiski obsegajo:

- Obsege in ploščine vseh likov
- Polmer trikotniku očrtanega in včrtanega kroga
- Izreke, ki jih poznamo v določenih likih (Pitagorov, sinusni, kosinusni, Evklidov, višinski,...)
- Geometrijska telesa - površine in prostornine