KOMBINATORIKA

Pravilo produkta ali osnovni izrek kombinatorike

Uporabimo takrat, ko imamo k zaporednih faz in v vsaki fazi na izbiro več različnih elementov in morame iz vsake faze enega izbrati.

(*Primer. Kosilo je sestavljeno iz predjedi, glavne jedi in sladice* ***(treh faz).*** *Na voljo imamo več različnih predjedi (*n_1*), glavnih jedi (*n_2*) in sladic (*n_3*). Na koliko načinov sestavimo kosilo, tako da je sestavljeno iz vseh treh delov?)*

Kadar imamo k zaporednih faz in velja, da je

- v 1. fazi n_1 odločitev
- v 2. fazi n_2 odločitev
- v 3. fazi n_3 odločitev
- …
- v k-ti fazi n_k odločitev,

potem je število vseh izbir (N) enako produktu vseh odločitev v posamezni fazi:

$$\boldsymbol{N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k}$$

Pravilo vsote

Uporabimo takrat, ko imamo k množic z več elementi, ampak izbori niso združljivi kot v zgornjem primeru, temveč izbiramo med elementi ene izmed vseh množic.

(*Primer: Imamo več kategorij knjig -* n_1 *učbenikov,* n_2 *slovarjev in* n_3 *romanov. Moramo se odločiti za* *<u>eno</u>* *knjigo* izmed vseh*. Koliko možnosti imamo na izbiro?)*

Sedaj izbiramo med

- možnostmi v 1. množici (n_1 izborov)

ali

- možnostmi v 2. množici (n_2 izborov)

ali

- ….

ali

- možnostmi v k-ti množici (n_k izborov)

Število vseh izbir je potem število M:

$$\boldsymbol{M = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k}$$

Permutacije

So razporeditve n elementov na n mest. Vrstni red pri permutacijah je pomemben. Način računanja bo odvisen od tega, ali so vsi elementi različni ali pa se lahko kateri tudi ponavljajo. Zato ločimo permutacije na dve veji, permutacije s ponavljanjem in permutacije brez ponavljanja.

I. Permutacije brez ponavljanja:

To je število razporeditev n različnih elementov na n mest.

Število vseh razporeditev: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

ali krajše zapisano $P_n = n!$ (preberemo 'n fakulteta' ali 'n faktorsko')

II. Permutacije s ponavljanjem:

To je število razporeditev n elementov na n mest, kjer pa ni nujno da so vsi elementi različni.

V tem primeru se zgodi, da je lahko število razporeditev manjše kot prej, saj če dva enaka elementa zamenjamo, je to na pogled še vedno popolnoma enaka razporeditev.

Potem je izračun malo drugačen. Če se en element pojavi k_1-krat, drugi k_2-krat,…. In n-ti element se pojavi k_n-krat, velja da je število vseh razporeditev enako

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Veljati pa mora, da je vsota $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ enaka številu vseh elementov n.

Variacije

To je število razporeditev **n elementov na r mest**. Pri tem velja, da je število mest manjše kot imamo na izbiro elementov (r < n). Zato se zgodi, da nekaj elementov ostane nerazporejenih.

Vrstni red pri variacijah je pomemben. Podobno kot prej ločimo med variaciami brez ponavljanja in variacijami s ponavljanjem.

I. Variacije brez ponavljanja

Število variacij n različnih elementov na r mest je enako

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

II. Variacije s ponavljanjem

Elementi niso nujno različni.

Število vseh možnih variacij razporejanja n elementov na r mest s ponavljanjem:

$$(p)V_n^r = n^r$$

Kombinacije

Kombinacije s število izbir r elementov izmed vseh *n* elementov, kjer zanemarimo vrstni red.

Gre se bolj za tvorjenje množic, kjer nas ne zanima, v kakšnem vrstnem redu so elementi temveč preprosto samo to, kateri elementi so vsebovani v množici. Vrstni red torej ni pomemben.

I. Kombinacije brez ponavljanja

Torej, imamo n različnih elementov, med katerimi jih izbiramo r za sestavo množice.

Na koliko načinov to lahko storimo, pa je število kombinacij brez ponavljanja, ki jih izračunamo na naslednji način:

$$C_n^r = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

To lahko krajše zapišemo z binomskim simbolom

$$C_n^r = \binom{n}{r}$$

I. Kombinacije s ponavljanjem

Kombinacije s ponavljanjem uporabimo takrat, ko želimo *r* elementov iz množice z *n* elementi razporediti na različne načine. Pri tem lahko isti element nastopa poljubno večkrat.

Število kombinacij s ponavljanem izračunamo na naslednji način:

$$(p)C_n^r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!}$$

Binomski izrek

Spomnimo se osnovnih primerov potence dvočlenika a + b:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$\dots$$

Binomski izrek nam pove, kako v splošnem lahko razvijemo katerokoli potenco dvočlenika : $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$

Prvemu členu dvočlenika se pri razvoju vrednost potence zmanjšuje proti 0, medtem ko se drugemu členu vrednost eksponenta povečuje od 0 do stopnje potence.

Zgornje število v binomskem simbolu predstavlja vrednost potence.

Spodnje število se povečuje

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$\dots$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \binom{n}{0}\boldsymbol{a}^{n}\boldsymbol{b}^{0} + \binom{n}{1}\boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b}^{1} + \binom{n}{2}\boldsymbol{a}^{n-2}\boldsymbol{b}^{2} + \dots + \binom{n}{n-1}\boldsymbol{a}^{1}\boldsymbol{b}^{n-1} + \binom{n}{n}\boldsymbol{a}^{0}\boldsymbol{b}^{n}$$

Koeficienti razvoja, ki nam predstavljajo Pascalov trikotnik:

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\dots$$

Lastnosti binomskega izreka:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\dots$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

0! = 1

1! = 1

Torej, če je vsota $\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{n}$, potem velja:

$$\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2}$$

VERJETNOST

Poskus (X) - Vsako opazovanje, izvajanje ali merjenje nekega pojava**.**

Dogodek - vsak rezultat, ki ga dobimo ob izvajanju poskusa.

Slučajni dogodek (A, B, C, …) – dogodek, ki se lahko zgodi ali pa tudi ne. (*primer slučajnega dogodka je, da pade šestica, ko vržemo igralno kocko*)

Gotov dogodek (G) – dogodek, ki se ob vsaki ponovitvi poskusa zgodi. (npr. *pri poskusu meta igralne kocke bo padla cifra od 1 do 6*)

Nemogoč dogodek (N) – dogodek, ki se nikoli ne zgodi pri nekem poskusu (npr. *pri metu igralne kocke bo padla cifra 8*)

Elementarni in sestavljeni dogodki

Vsi dogodki E_i pri metu kocke so takšni, da se jih ne da zapisani kot vsoto ali produkt nekih drugih dogodkov. Torej so **osnovni** ali **elementarni dogodki**. Iz elementarnih dogodkov z operatorji tvorimo **sestavljene dogodke**.

Elementarni dogodki na primeru meta igralne kocke bi bili:

E_1…pade ena pika

E_2…padeta dve piki

Itd. ….

Sestavljeni dogodki so kot unije poljubnih elementarnih dogodkov:

pade sodo število pik: $E_2 \cup E_4 \cup E_6$

pade liho število pik: $E_1 \cup E_3 \cup E_5$

pade cifra večja od 4: $E_5 \cup E_6$

Množico vseh elementarnih dogodkov nekega poskusa imenujemo **vzorčni prostor.** (*vzorčni prostor pri metu igralne kocke bi bila množica* $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$)

Vsota (unija) vseh elementarnih dogodkov pa je gotov dogodek:

$$\boldsymbol{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = G}; \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Ker sta dva katerakoli **dva elementarna dogodka** osnovna dogodka, ki **nimata nič skupnega**, mora veljati, da je njun presek vedno prazna množica:

$$\boldsymbol{E_i \cap E_j = \emptyset}; \quad \boldsymbol{i, j \in 1, \ldots, n} \qquad \boldsymbol{i \neq j}$$

Iz vzorčnega prostora z n elementarnimi dogodki lahko sestavimo 2^n različnih vsot dogodkov. Med temi dogodki lahko na več načinov izberemo tiste, ki so paroma nezdružljivi njihova vsota pa predstavlja gotov dogodek. Taki dogodki sestavljajo **popoln sistem dogodkov** poskusa X.

Računanje z dogodki

Z dogodki računamo podobno kot z množicami in uporabljamo enake operatorje. Tudi grafično dogodke upodabljamo z Vennovimi diagrami.

VSOTA DOGODKOV

Vsoto dogodkov A in B označimo z $\boldsymbol{A \cup B}$. Ta dogodek se zgodi, ko se zgodi ali A ali B, torej vsaj eden izmed dogodkov.

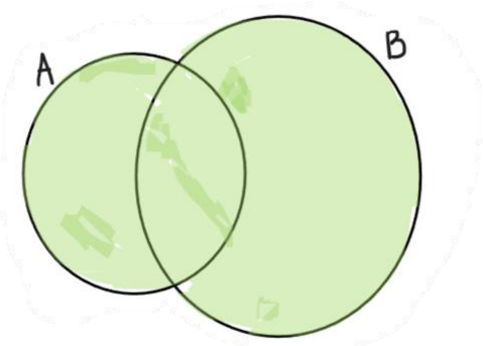
Lastnosti vsote dogodkov:

$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$

$\boldsymbol{A \cup A = A}$

$\boldsymbol{A \cup G = G}$

$\boldsymbol{A \cup N = A}$



PRODUKT DOGODKOV

Produkt dogodkov $\boldsymbol{A \cap B}$ se zgodi, ko se zgodita A in B hkrati. Če se dogodka A in B ne moreta zgoditi hkrati ju imenujemo **nezdružljiv dogodek**, njun produkt pa je nemogoč dogodek. Če produkt ni nemogoč dogodek pa sta A in B **združljiva dogodka**.

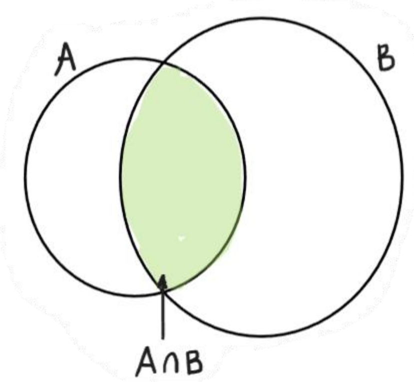
Lastnosti produkta dogodkov:

$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$

$\boldsymbol{A \cap A = A}$

$\boldsymbol{A \cap G = A}$

$\boldsymbol{A \cap N = N}$



NASPROTNI DOGODEK

Nasprotni dogodek A' dogodka A se zgodi, če se A ne zgodi.

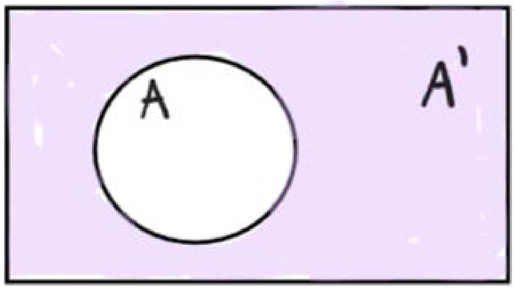
Lastnosti nasprotnih dogodkov:

$\boldsymbol{A \cup A' = G}$

$\boldsymbol{A \cap A' = N}$

$\boldsymbol{(A')' = A}$

$\boldsymbol{G' = N}$ oziroma $\boldsymbol{N' = G}$



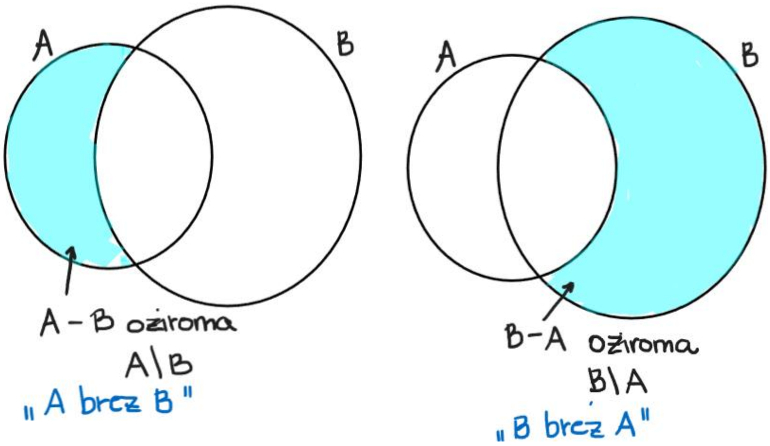
RAZLIKA DOGODKOV

Razlika dogodkov $\boldsymbol{A - B}$ se zgodi, če se zgodi dogodek A in se hkrati ne zgodi dogodek B.

Lastnosti razlike dogodkov:

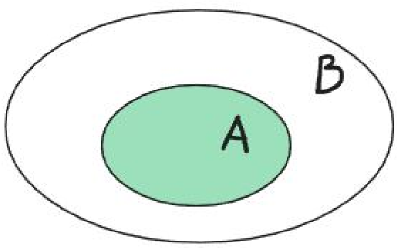
$\boldsymbol{A - B \neq B - A}$

$\boldsymbol{A - B = A \cap B'}$



NAČIN DOGODKA

Dogodek A je način dogodka B, označimo $\boldsymbol{A \subset B}$, če se vsakokrat, ko se zgodi A, hkrati zgodi tudi B.



Dogodka sta enaka natanko tedaj, kadar je A način dogodka B in hkrati B način dogodka A.

$$\boldsymbol{A = B \iff A \subset B \text{ in } B \subset A}$$

Definicija verjetnosti dogodka

Verjetnost dogodka je število, ki označuje kolikšna je možnost, da se bo v enem poskusu zgodil nek dogodek oziroma ali se bo nek dogodek sploh zgodil ali ne.

Oznaka za verjetnost: **P**

Oznaka za verjetnost dogodka A: **P(A)**

Verjetnost je število, ki se giblje med 0 in 1 (*0 pomeni, da je dogodek nemogoč; 1 pa pomeni, da je dogodek gotov)*:

$$0 < P(A) < 1$$

Klasična definicija verjetnosti

Če so vsi elementarni dogodki nekega vzorčnega prostora dogodka A enako verjetni, potem velja da je verjetnost dogodka A enaka

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$$

m...število ugodnih elementarnih dogodkov (ugodne možnosti)

n...število vseh elementarnih dogodkov za dogodek A (vse možnosti)

Lastnosti verjetnosti dogodka (aksiomi verjetnosti):

- Verjetnost slučajnega dogodka A je nenegativno število:

$$\boldsymbol{P(A) \geq 0}$$

- Verjetnost gotovega dogodka G je enako 1:

$$\boldsymbol{P(G) = 1}$$

- Verjetnost vsote nezdružljivih dogodkov A in B; če velja $\boldsymbol{A \cap B = N}$, je enaka vsoti verjetnosti posameznih dogodkov:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

- Verjetnost nemogočega dogodka *N* je enako 0:

$$\boldsymbol{P(N) = 0}$$

- Verjetnost dogodku *A* nasprotnega dogodka *A'*, je enaka 1 - verjetnost dogodka *A*:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Če je dogodek A način dogodka B ($A \subset B$), potem *velja:*

$$P(A) \leq P(B)$$

Verjetnost razlike dogodkov:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Verjetnost vsote dogodkov:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Zgornja meja verjetnosti dogodka:

Verjetnost poljubnega dogodka ne more nikoli biti večja od 1.

$$P(A) \leq 1$$

TE ZANIMAJO NATANČNO REŠENE NALOGE IZ POGLAVJA 'KOMBINATORIKA IN VERJETNOST'?

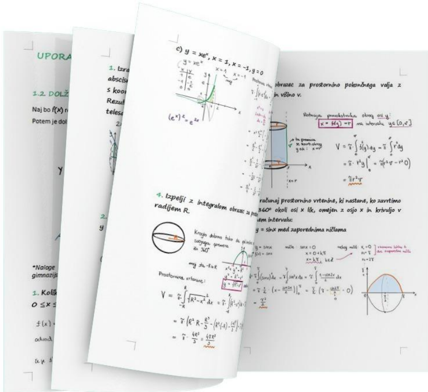
Pripravljena je e-zbirka kar 250+ pregledno rešenih primerov korak za korakom, s katerim boš popolnoma usvojil-a vso snov. To ti zagotavljam. :)

IN PA NE SPREGLEJ ....

ZBIRKE 1000+ REŠENIH NALOG, KI SO ŽE NA VOLJO:

- ODVOD (pravila za računanje, uporaba odvoda) z vso teorijo in formulami: 230+ nalog

- INTEGRAL (pravila, določeni in nedoločeni integral, metode integriranja, ploščine in prostornine) z vso teorijo in formulami: 170+ nalog



- ZAPOREDJA (lastnosti zaporedij, limita in konvergenca, aritmetično zaporedje, geometrijsko zaporedje in vrsta, obrestni račun): 280+ nalog

- KOMBINATORIKA IN VERJETNOST (osnovni izrek kombinatorike, permutacije, variacije, kombinacije, binomski izrek, verjetnost): 250+ nalog

- REŠENE MATURITETNE POLE (18 pol; spomladanski rok 2004-2021)

Za dostop do rešenih nalog preveri [TUKAJ.]()