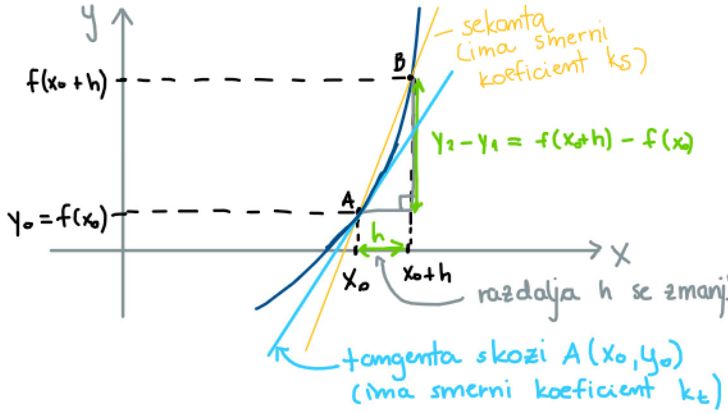
ODVOD

Splošna definicija odvoda

Odvod funkcije v točki $T(x_0, y_0)$ je enak smernemu koeficientu tangente na graf funkcije v točki T, kar je enako limiti diferenčnega kvocienta (ko gre h proti 0):

$$\boxed{f'(x_0) = k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x}}$$

diferenčni kvocient: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = k_s$



$$\boxed{\lim_{h \to 0} k_s = k_t}$$

instrukcijeonline.com

Pravila za odvajanje:

- če je funkcija pomnožena s konstanto in ta produkt odvajamo:

  $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ konstanto prepišemo, funkcijo odvajamo

- odvod vsote ali razlike dveh funkcij:

  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ odvajamo posamezne funkcije

- odvod produkta dveh funkcij:

  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

- odvod količnika dveh funkcij:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Obrazci za odvajanje elementarnih funkcij:

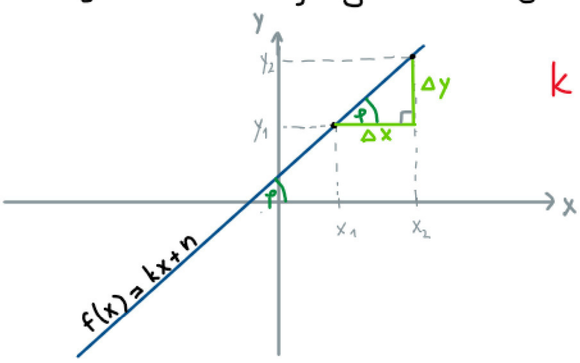
Naziv funkcije	Funkcija $f(x)$	Odvod funkcije $f'(x)$
Konstantna	k	0
Potenčna	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Eksponentna	a^x	$a^x \cdot \ln a$
e	e^x	e^x
Logaritem	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
Naravni logaritem	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Sinus	$\sin x$	$\cos x$
Kosinus	$\cos x$	$-\sin x$
Tangens	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
Kotangens	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
Arkus sinus	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arkus kosinus	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arkus tangens	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
Arkus kotangens	$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

instrukcijeonline.com

Geometrijski pomen odvoda

Spomnimo se premice $y = k \cdot x + n$ in njenega smernega koeficienta k:

spomni se kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \varphi$$

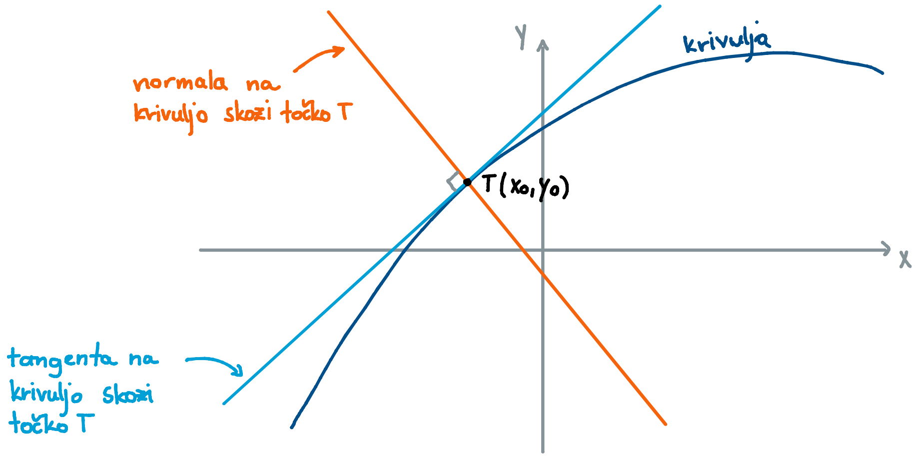
$k > 0 \rightarrow$ premica narašča

$k < 0 \rightarrow$ premica pada

Odvod funkcije je smerni koeficient tangente na krivuljo v dani točki in ta je enak tangensu naklonskega kota, ki ga tangenta oklepa s pozitivno smerjo osi x:

$$k_t = f'(x_0) = \tan \varphi$$

Enačba tangente in normale na krivuljo



- tangenta in normala sta pravokotni premici
- smerna koeficienta tangente in normale sta nasprotni in obratni vrednosti:

$$k_t = -\frac{1}{k_n}$$

ali

$$k_n = -\frac{1}{k_t}$$

Enačba tangente na krivuljo v točki $T(x_0, y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$= k_t \cdot (x - x_0)$$

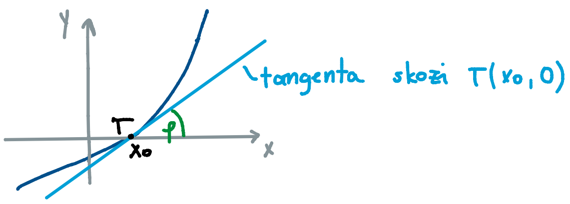
Enačba normale na krivuljo v točki $T(x_0, y_0)$: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

$$= -\frac{1}{k_t} \cdot (x - x_0)$$

$$= k_n \cdot (x - x_0)$$

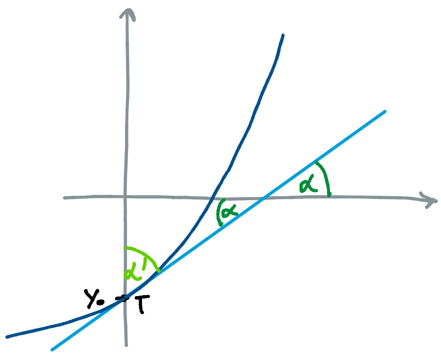
Kot med krivuljo in abscisno osjo

je kot med tangento na krivuljo v točki na x osi in med abscisno osjo



$$\tan\varphi = k_t = f'(x_0)$$

Kot med krivuljo in ordinatno osjo (y osjo)



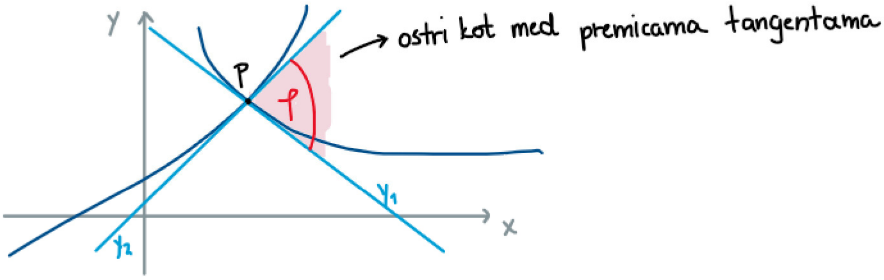
- tangenta skozi $T(0, y_0)$ oklepa z x osjo kot α
- kot med krivuljo in y osjo je potem komplementarni kot od kota α: kot α'

$$\alpha' = 90° - \alpha$$

Kot med dvema krivuljama

je kot med tangentama na ti dve krivulji v njunem presečišču.

To pa je dejansko kot med dvema premicama, kar poznamo že od prej.

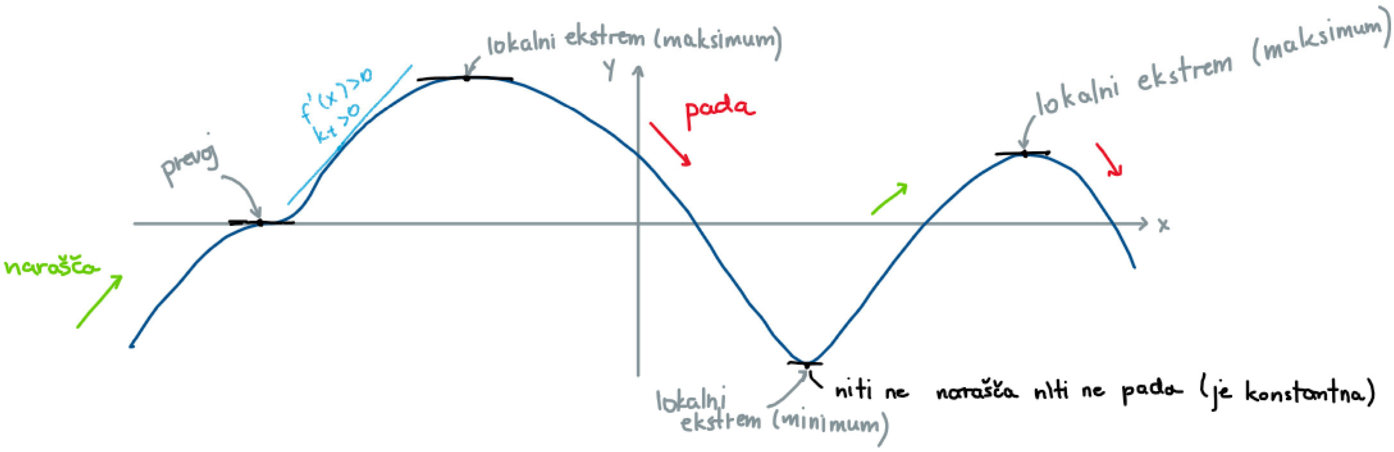


Kot dobimo s formulo:

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$

k_1... smerni koeficient prve tangente
k_2... smerni koeficient druge tangente

Naraščanje / padanje funkcije ter izračun stacionarnih točk



- vidimo, da funkcija v določenih točkah narašča, v drugih pada, ponekod pa nič od tega.

- funkcija $\boxed{\text{NARAŠČA}}$ tam, kjer je k_t pozitiven ($k_t > 0$), to je natanko tedaj ko $\boxed{f'(x)>0}$
- funkcija $\boxed{\text{PADA}}$ tam kjer je k_t negativen ($k_t < 0$), to je natanko tedaj ko $\boxed{f'(x)<0}$
- kjer funkcija preide iz padanja v naraščanje (ali obratno), je $k_t = 0$, saj je tangenta v tisti točki vodoravna; takrat je tudi $\boxed{f'(x)=0}$
  rečemo, da je v točki LOKALNI EKSTREM $\Longleftrightarrow$ $f'(x)=0$

STACIONARNE TOČKE (točke v katerih je tangenta vzporedna x osi → vodoravna):

⇒ funkcija ima v točki x_0 **LOKALNI MAKSIMUM**, kadar iz naraščanja preide v padanje; levo je odvod pozitiven, desno je odvod negativen: $f'(x_0)=0$

→ funkcija ima v točki x_0 **LOKALNI MINIMUM**, kadar iz padanja preide v naraščanje; desno je odvod negativen, levo je odvod pozitiven: $f'(x_0)=0$

→ funkcija ima v točki x_0 **VODORAVNI PREVOJ**, kadar je v tej točki $k_t=0$, vendar ni tam niti maksimum niti minimum. V okolici prevoja odvod ne spremeni predznaka

Odvod sestavljene funkcije (odvod kompozituma)

Zapis funkcije kompozituma: $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

PRIMER: $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$

$\Rightarrow f(g(x)) = f(\underbrace{x+1}) = (x+1)^2$

x se zamenja z x+1

$g(f(x)) = g(\underbrace{x^2}) = x^2+1$

x se zamenja z x^2

} kar smo dobili, je sestavljena funkcija (kompozitum)

Odvod sestavljene funkcije: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

1. PRIMER: $\sin(2x+1)$ je sestavljena f. iz funkcije sinus ter polinoma $2x+1$

sinus = g, $2x+1$ = f

odvod: $(\sin(2x+1))' = \underbrace{\cos(2x+1)}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{2}_{f'(x)}$

Torej: $\sin x = g(x) \rightarrow g'(x) = \cos x$

$\sin(2x+1) = g(f(x))$

$2x+1 = f(x)$

2. PRIMER: odvajaj $(3x^2-6)^3$

ta f. je sestavljena iz potenčne x^3 ter polinoma $3x^2-6$

x^3 = g, $3x^2-6$ = f

odvod: $((3x^2-6)^3)' = \underbrace{3 \cdot (3x^2-6)^2}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{6x}_{f'(x)}$

Torej: $x^3 = g(x) \rightarrow g'(x) = 3x^2$

$(3x^2-6)^3 = g(f(x))$

$3x^2-6 = f(x)$

Odvod korenske funkcije

$f(x) = \sqrt{x}$ ← I. koren zapišemo kot potenco

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[m]{x}^{\,n} = x^{\frac{n}{m}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ←

v splošnem: $f(x) = \sqrt[m]{x^n}$
$= x^{\frac{n}{m}}$ odvajamo kot

$f'(x) = \frac{n}{m} \cdot x^{\frac{n}{m}-1}$

Odvod implicitne funkcije

spomnimo se: $y = f(x)$ je EKSPLICITNA

$f(x,y) = 0$ IMPLICITNA

npr. $y = 2x + 5$ eksplicitna

$y - 2x - 5 = 0$ implicitna

- ko odvajamo enačbo, y odvajamo kot funkcijo ⇒ dobimo y'
  x odvajamo kot spremenljivko ⇒ $x' = 1$

  npr. $(4y)' = 4y'$ $\quad (4y^2)' = 8y \cdot y'$!

  $(4x)' = 4$ $\quad (4x^2)' = 8x$

- nato izrazimo y' iz enačbe

instrukcijeonline.com

INTEGRAL

Nedoločeni integral

Integriranje je obratna operacija od odvajanja – iz danega odvoda iščemo prvotno funkcijo

PRIMER: $2x \xrightarrow{\text{odvajamo}} 2$, $\; 2 \xrightarrow{\text{integriramo}} 2x$

$2x + 3 \rightleftarrows 2$

$2x - 7 \rightleftarrows 2$

$2x + C \rightleftarrows 2$

→ $(2x + C)' = 2$

$\int \underbrace{2}_{f(x)} dx = \underbrace{2x}_{F(x)} + C$

Oznaka: $\int \underbrace{f(x)}_{\text{funkcija, ki jo integriramo}} dx = \underbrace{F(x)}_{\text{integral}} + \underbrace{C}_{\text{konstanta}}$

Osnovni nedoločeni integrali:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;;\quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

Osnovna pravila integriranja

1. Integriranje vsote/razlike funkcij:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$ integriramo vsako funkcijo posebej

2. Integriranje produkta konstante s funkcijo:

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) dx$$ konstanto pišemo pred integralom

3. Uvedba nove spremenljivke (glej rešene naloge)

4. Integracija po delih (per partes)

Pravilo največkrat uporabljamo pri integraciji produkta algeberske funkcije (npr. kvadratne, potenčne, polinomske, korenske,... funkcije) in transcendentne funkcije (npr. eksponentne, logaritemske, trigonometrične,... funkcija) ali pri produktu dveh transcendentnih funkcij.

$$\int \underbrace{f(x)}\cdot\underbrace{g(x)\,dx}$$ ⟶ eno iz produkta odvajamo: npr. $f(x)$: zamenjamo z u

drugo iz produkta integriramo: npr. $g(x)$: zamenjamo z dv

$$= \int u \cdot dv$$

integriramo: $g(x)\,dx = dv$ ⟶ $\int g(x) dx = v$

odvajamo: $f(x) = u$ ⟶ $f'(x)\,dx = du$

Torej integracijo „per partes" rešimo po naslednjem obrazcu:

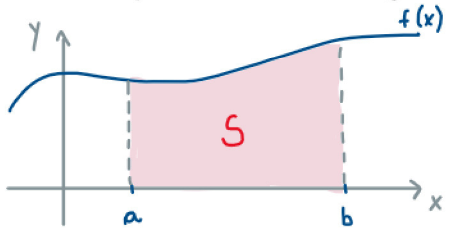
$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Določen integral

Oznaka: $\int_a^b f(x)\,dx$ a… spodnja meja integrala
b… zgornja meja integrala

Uporaba: izračun ploščine med krivuljo $f(x)$ in x osjo na intervalu $x \in [a, b]$

spodnja meja   zgornja meja



Velja: $S = \int_a^b f(x)$

ZVEZA MED DOLOČENIM IN NEDOLOČENIM INTEGRALOM:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{integrirana funkcija}}\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

v spremenljivko vstavimo zgornjo in spodnjo mejo in odštejemo vrednosti

Lastnosti določenega integrala:

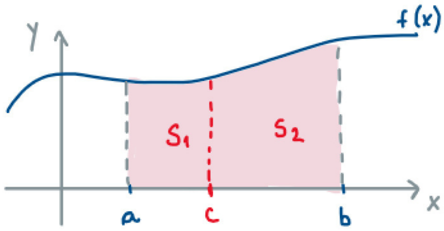
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)$$

! enaka pravila za računanje kot pri nedoločenem integralu

Naj bo $a < c < b$. Tedaj velja:

$$\underset{S}{\int_a^b f(x)\,dx} = \underset{S_1}{\int_a^c f(x)\,dx} + \underset{S_2}{\int_c^b f(x)\,dx}$$



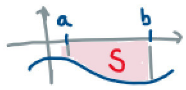
Naj bo $a < b$. Če zamenjamo meji med sabo, integral spremeni predznak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$F(b) - F(a) \text{ enako } -(F(a) - F(b))$$

Računanje ploščine lika med grafom funkcije in abscisno osjo

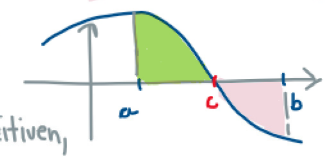
- ko je funkcija na intervalu $[a,b]$ pozitivna (nad osjo x): $S = \int_a^b f(x)\,dx$
  (vrednost integrala je pozitivna)
- ko je funkcija na intervalu $[a,b]$ negativna (pod osjo x): $S = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$
  (vrednost integrala je negativna)



Za ploščino velja: $S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$

absolutna vrednost integrala je ploščina lika

- ko je funkcija na intervalu $[a,b]$ pozitivna in negativna
  (vrednost integrala $\int_a^b f(x)dx$ je razlika med integraloma $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)dx$, saj je prvi pozitiven, drugi pa negativen)

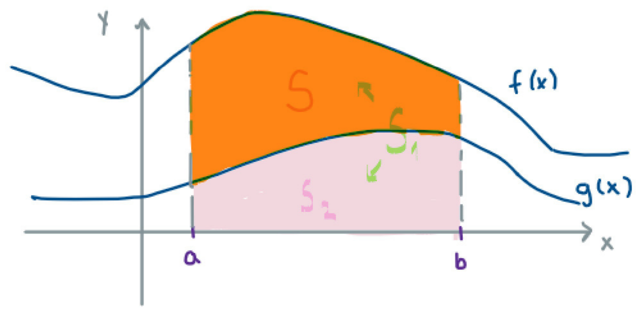


$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\text{pozitivna vrednost}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\text{negativna vrednost}}$$

izračun ploščine v takšnem primeru:

$$S = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^b f(x)\,dx \right|$$

Računanje ploščine lika med grafom dveh funkcij



$$S = \overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{S_1} - \overbrace{\int_a^b g(x)dx}^{S_2} = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ → celoten lik pod krivuljo f(x)

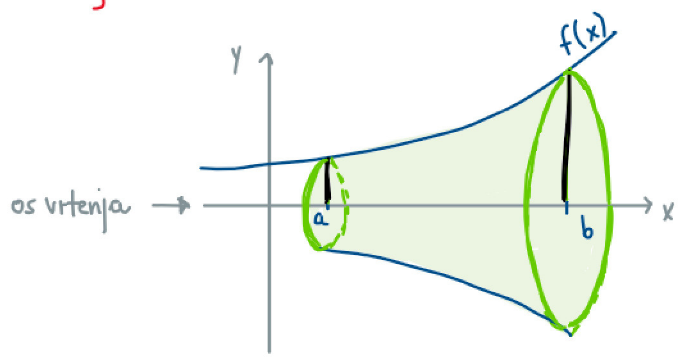
$\int_a^b g(x)dx$ → celoten lik pod krivuljo g(x)

$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ → lik med krivuljama

Računanje prostornine rotacijskih teles:

Če lik (območje) med krivuljo f(x) in abscisno osjo na intervalu $[a,b]$ zavrtimo za $360°$ okoli x osi, dobimo rotacijsko telo.

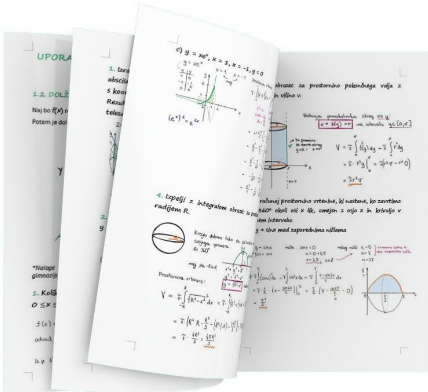
Prostornina vrtenine: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$



ZBIRKE 1000+ REŠENIH NALOG, KI SO ŽE NA VOLJO:

- **ODVOD** (pravila za računanje, uporaba odvoda) z vso teorijo in formulami: **230+ nalog**

- **INTEGRAL** (pravila, določeni in nedoločeni integral, metode integriranja, ploščine in prostornine) z vso teorijo in formulami: **170+ nalog**



- **ZAPOREDJA** (lastnosti zaporedij, limita in konvergenca, aritmetično zaporedje, geometrijsko zaporedje in vrsta, obrestni račun): **280+ nalog**

- **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST** (osnovni izrek kombinatorike, permutacije, variacije, kombinacije, binomski izrek, verjetnost): **250+ nalog**

- **REŠENE MATURITETNE POLE** (18 pol; spomladanski rok 2004-2021)

Za dostop do rešenih nalog preveri [TUKAJ.]()