Zaporedje je funkcija $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f: n \to a_n$ (a_n... n-ti člen zaporedja)

$f(n) = a_n$

$a_1, a_2, a_3 \ldots$ členi zaporedja

$a_n \ldots$ splošni člen

PRIMERI:
1. $a_n = (1, 2, 3, \ldots)$ $a_1, a_2, a_3, \ldots$
2. $a_n = (5, 3, 1, -1, \ldots)$
3. $a_n = (2, 6, 18, \ldots)$

Lastnosti zaporedij:
- končno / neskončno zaporedje
- omejeno / neomejeno zaporedje
- naraščajoče / padajoče zaporedje

Zaporedje je končno, če vsebuje končno mnogo členov. Pri tem je poznan zadnji člen in število členov.

Zaporedje je neskončno, če je iz neskončno členov. Pri tem ne poznamo končnega člena.

Zaporedje je navzgor omejeno, če obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\boxed{a_n \leq M}$$ M... zgornja meja zaporedja

Zaporedje je navzdol omejeno, če obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\boxed{a_n \geq m}$$ m ... spodnja meja zaporedja

Torej: zaporedje je omejeno, kadar ima zgornjo in spodnjo mejo; za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\boxed{m \leq a_n \leq M}$$

Neomejeno je, kadar je zgoraj in spodaj neomejeno.

Zaporedje je naraščajoče, kadar za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_{n+1} \geq a_n$

(vsak naslednji člen je večji ali enak predhodnemu) ali

$$\boxed{a_{n+1} - a_n \geq 0}$$

strogo naraščajoče, ko: $\boxed{a_{n+1} - a_n > 0}$ (enačaj izpustimo)

Zaporedje je padajoče, kadar za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_{n+1} \leq a_n$
(vsak naslednji člen je manjši ali enak predhodnemu)
ali
$a_{n+1} - a_n \leq 0$

strogo padajoče, kadar: $a_{n+1} - a_n < 0$

Zaporedje je monotono, kadar samo narašča ali samo pada.

Zaporedje je konstantno, kadar velja: $a_{n+1} = a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$
(vsi členi so enaki)

Zaporedje je alternirajoče, če se izmenjujejo pozitivni in negativni členi.
npr. $a_n = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

Aritmetično zaporedje (AZ)

Zaporedje je aritmetično, kadar je razlika dveh zaporednih členov konstantna.
(vedno prištejemo enako vrednost, da dobimo naslednji člen)
d... diferenca (razlika med zaporednima členoma)

$a_1 + d = a_2$

$a_2 + d = a_3 \longrightarrow (a_1 + d) + d = a_3 \longrightarrow a_1 + 2d = a_3$

$\vdots$

$a_n + d = a_{n+1}$

$a_1 + (n-1) \cdot d = a_n$

$d = a_{n+1} - a_n$ ← enačbe diference

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = a_m + (n-m) \cdot d$

enačbi za splošni člen

Velja:
- če je $d > 0$, je zaporedje naraščajoče
- če je $d = 0$, je zaporedje konstantno
- če je $d < 0$, je zaporedje padajoče

Aritmetična sredina: vsak člen je aritmetična sredina sosednjih dveh $\Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

ali

dveh simetrično ležečih $\Rightarrow a_n = \frac{a_{n-r} + a_{n+r}}{2}$

npr. $a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$

Končna aritmetična vrsta

je vsota prvih n členov AZ: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_n$

$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)\cdot d) = S_n$

Oznaka: S_n

Enačba za izračun vsote končne aritmetične vrste ($n \in \mathbb{N}$):

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(2a_1 + (n-1)\cdot d)$$

Geometrijsko zaporedje (GZ)

Zaporedje je geometrijsko, če je količnik dveh zaporednih členov konstanten.
(vsak člen pomnožimo z enako vrednostjo, da dobimo naslednji člen)

k ... količnik dveh zaporednih členov

$a_1 \cdot k = a_2$

$a_2 \cdot k = a_3 \longrightarrow a_1 \cdot k \cdot k = a_3 \longrightarrow a_1 \cdot k^2 = a_3$

$\vdots$

$a_{n-1} \cdot k = a_n \longleftarrow$ v splošnem $\longrightarrow a_1 \cdot k^{n-1} = a_n$

$$k = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

enačbe za količnik

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

$$a_n = a_m \cdot k^{n-m}$$

enačbi za splošni člen

$a_1 > 0$:
- če $k > 1$, zaporedje narašča
- če $k = 1$, je zaporedje konstantno
- če $0 < k < 1$, zaporedje pada
- če $k < 0$, zaporedje alternirajoče

$a_1 < 0$:
- če $k > 1$, zaporedje pada
- če $k = 1$, je zaporedje konstantno
- če $0 < k < 1$, zaporedje narašča
- če $k < 0$, zaporedje alternirajoče

Končna geometrijska vrsta

je vsota prvih n členov GZ: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_n$

$a_1 + (a_1 \cdot k) + (a_1 \cdot k^2) + \ldots + (a_1 \cdot k^{n-1}) = S_n$

Oznaka: S_n

Enačba za izračun vsote končne geometrijske vrste:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}}$$

Neskončno zaporedje

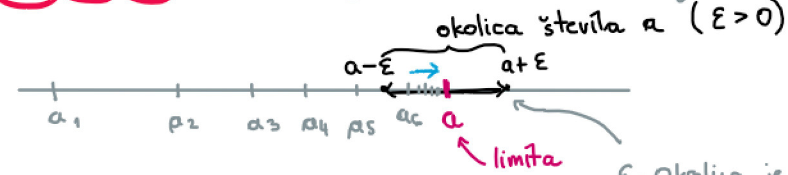
- nima končnega (zadnjega) člena

Poznamo:
- zaporedja, kjer gredo vrednosti členov v neskončnost
- zaporedja, kjer se vrednosti členov približujejo nekemu številu ⟶ temu številu rečemo LIMITA ZAPOREDJA

Število a je limita neskončnega zaporedja, če za vsako majhno pozitivno število ε obstaja takšen $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > N$ velja:

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon}$$

→ v okolici števila a je neskončno mnogo členov zaporedja



ε-okolica je odprt interval dolžine 2ε

Zapišemo: $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$

Če ima zaporedje limito, potem je to zaporedje konvergentno.
Rečemo, da zaporedje konvergira k limiti.

Katera zaporedja so konvergentna?
- navzgor omejena in naraščajoča hkrati
- navzdol omejena in padajoča hkrati
- konstantna zaporedja
- vsako GZ s količnikom $|k| < 1$

Zaporedje, ki ni konvergentno in nima limite, je divergentno.

Katera zaporedja so divergentna?
- vsako AZ z diferenco $d \neq 0$
- vsako GZ s količnikom $k = -1$
- vsako GZ s količnikom $|k| > 1$

Kadar se členi približujejo dvema ali več številom, to niso limite zaporedja, ampak so to STEKALIŠČA.
Stekališče zaporedja je število a, ki ima v ε - okolici točke neskončno mnogo členov danega zaporedja.

$$\text{Limita} \underset{\text{ni nujno}}{\overset{\text{vedno velja}}{\rightleftarrows}} \text{Stekališče}$$

Pravila za računanje z limitami

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ $(k \ldots \text{konstanta})$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $\left(b_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}; \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0\right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{a_1 \cdot k^{n-1}}_{a_n}) = 0$ (če je a_n geometrijsko zaporedje in velja: $0 < |k| < 1$)

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$; $a_n > 0$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ← Eulerjevo število

Neskončna vrsta

Neskončna vrsta v splošnem : $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

ni končnega člena

splošni člen

Delne vsote prvih n členov:

delne vsote (so končne)

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$ (vsota prvih dveh)

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ (vsota prvih treh)

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ (vsota prvih n členov)

zaporedje delnih vsot

$(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$

Vsota neskončne vrste je enaka limiti zaporedja delnih vsot:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = S$$

Neskončna **geometrijska** vrsta

Zapis: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots + a_1 k^{n-1} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 k^{i-1}$

Vsota neskončne geometrijske vrste se izračuna po obrazcu:

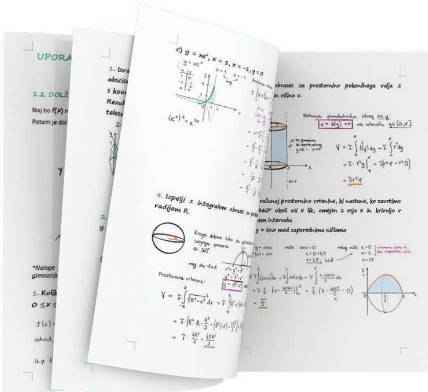
$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-k}; \quad |k| < 1$$

(GZ, ki nimajo $|k|<1$, nimajo limite)!

ZBIRKE 1000+ REŠENIH NALOG, KI SO ŽE NA VOLJO:

- **ODVOD** (pravila za računanje, uporaba odvoda) z vso teorijo in formulami: **230+ nalog**

- **INTEGRAL** (pravila, določeni in nedoločeni integral, metode integriranja, ploščine in prostornine) z vso teorijo in formulami: **170+ nalog**



- **ZAPOREDJA** (lastnosti zaporedij, limita in konvergenca, aritmetično zaporedje, geometrijsko zaporedje in vrsta, obrestni račun): **280+ nalog**

- **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST** (osnovni izrek kombinatorike, permutacije, variacije, kombinacije, binomski izrek, verjetnost): **250+ nalog**

- **REŠENE MATURITETNE POLE** (18 pol; spomladanski rok 2004-2021)

Za dostop do rešenih nalog preveri [TUKAJ.]